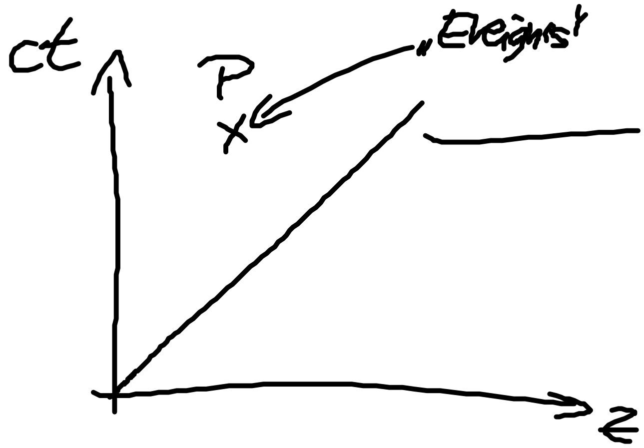
VII.5. Minkowski-Diagramm

→ Illustration raumzeitlicher Bewegung

Betrachte Bewegung in einem System Σ (in z-Richtung)



in drei Raumdimensionen „Lichtkegel"

Gerade mit $s^2 = 0$

$$\Leftrightarrow c^2t^2 - z^2 = 0$$

$$ct = z$$

Das Ereignis wird durch Vierervektor beschrieben:
$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

mit (Lorentz-invariantem:) Längenquadrat

$$s^2 = c^2t^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x^\mu)^2$$

man unterscheidet:

$s^2 > 0$ „zeitartiger" Vierervektor

$s^2 = 0$ „lichtartiger" "

$s^2 < 0$ „raumartiger" "

Die Bahnen von „materiellen" Teilchen ($v \leq c$) heißen „Weltlinien". Wo liegen diese?

Betrachte dazu den Abstand zweier Ereignisse

$P_1(ct_1, z_1)$, $P_2(ct_2, z_2)$

raumzeitlicher Abstand?

Differenz—Viererektor $\begin{pmatrix} c(t_1-t_2) \\ 0 \\ 0 \\ z_1-z_2 \end{pmatrix}$

dazugehöriges Längenquadrat

$$s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - (z_1-z_2)^2$$

es folgt:

$$s_{12}^2 > 0 \iff c(t_1-t_2) \geq z_1 - z_2$$

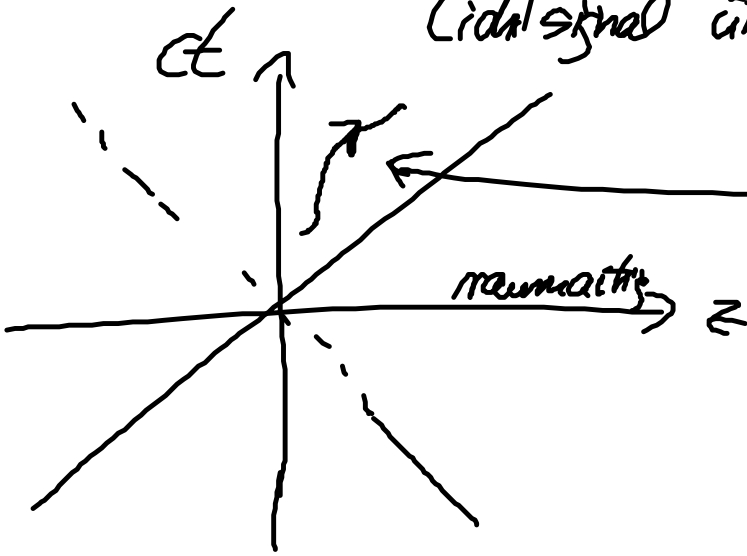
die Ereignisse sind durch ein Lichtsignal überbrückbar!

das ist der Fall für materielle Teilchen!
$(z_1-z_2) \sim vt$ mit $v < c$!

$\Rightarrow$ Weltlinien liegen in diesem Segment des Minkowski-Diagramms!

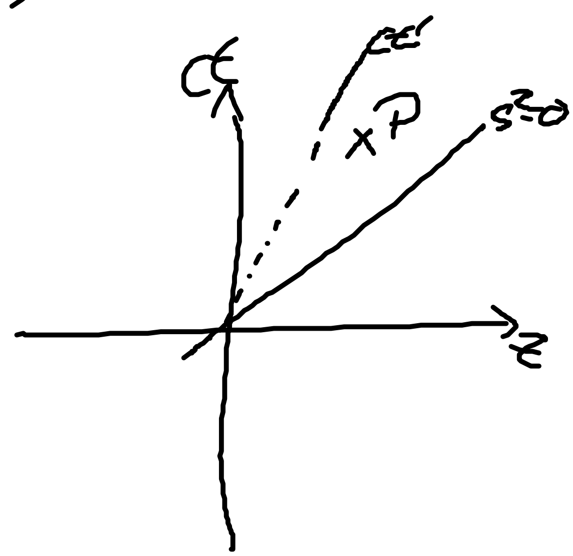
$s_{12}^2 < 0 \qquad z_1 - z_2 > c(t_1 - t_2)$

$\Rightarrow$ Die Ereignis sind nicht durch Lichtsignal überbrückbar!



Schließlich:

Einzeichnen eines (bewegten) Koordinatensystem Σ' $(\underline{v} \parallel \underline{e}_z)$



Zeitachse

im Ursprung gilt $z' = 0$

aus Lorentztransformation:

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow z = vt \Leftrightarrow ct = \frac{c}{v} z$$

$\Rightarrow$ Die Zeitachse von Σ' ist im System Σ eine Gerade mit Steigung $c/v > 1$ (liegt also im Lichtkegel!)

Raumachse von Σ'

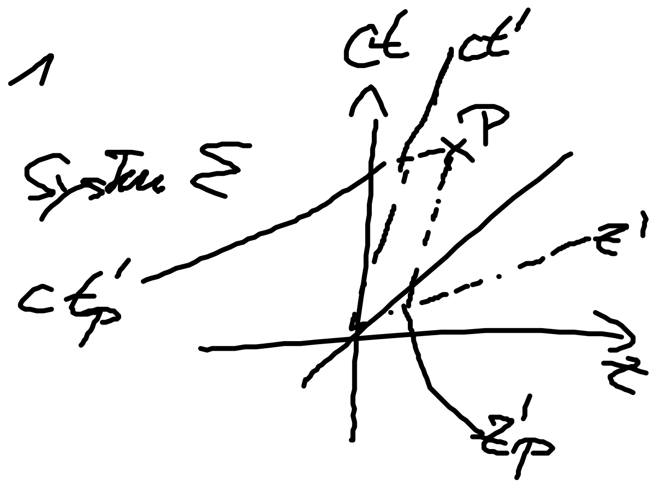
hier ist $t' = 0$

aus Lorentztransf. $\Longleftrightarrow$ $$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{c^2} z\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad ct = \beta z \qquad \boxed{\beta = \frac{v}{c}}$$

mit $\beta \leq 1$

Gerade mit Steigung < 1 im System Σ



VII. Ko- und Kontravariante Tensoren

bisher kennengelernt:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Lorentztrafo: $$(x')^\mu = L_{\mu\lambda} x^\lambda \quad (*)$$

erhält $s^2 = c^2t^2 - \underline{r}^2 = s'^2 = ct'^2 - \underline{r}'^2$

allgemeinen:

Betrachte „Vierertensor" („Lorentztensor") k-ter Stufe

Definition:

Bei einer Lorentztransformation gemäß ⊛ transformieren sich die Komponenten des Vierertensors $T^{\mu_1 \dots \mu_k}$ gemäß: (k Indizes!)

$$\boxed{(T')^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = L_{\mu_1 \lambda_1} L_{\mu_2 \lambda_2} L_{\mu_k \lambda_k} T^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}}$$

beachte:
- Der Vierervektor entspricht dem Vierertensor der Stufe $k=1$
- Vierertensor k-ter Stufe hat 4^k Komponenten

Spezialfälle

- $k=0$ „Vierer-Skalar"

mit $\varphi^0 = 1$ Komponente!

bleibt invariant unter der Lorentztransformation!

Beispiel: $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

$= s'^2$

- $\underline{n=1}$: Hierbei treten 2 Arten auf!

a) Kontravarianter Vektor

$$T^\mu = (T^0, T^1, T^2, T^3)$$

$$(T')^\mu = L_{\mu\lambda} T^\lambda$$

beachte: man kann schreiben

$$L_{\mu\lambda} = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\lambda}$$

$$(T')^\mu = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\lambda} T^\lambda$$

Beispiele

- $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ „Ereignis"

- Differential

$$d(x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$$

benutze Rechenregel (Kettenregel) für Ableitungen!

$$= \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} dx^\lambda = L_{\mu\lambda} dx^\lambda$$

man sieht: dx^μ transformiert sich tatsächlich wie ein kontravarianter Vierervektor!

b) Kovarianter Vierervektor

$$T_\mu = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

Indizes tiefgestellt!

$$(T')_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial (x')^\mu} T_\lambda$$

$$= \underbrace{(\underline{\underline{L}}^{-1})_{\lambda\mu}}_{\text{inverse Lorentzmatrix!}} T_\lambda$$

Beispiel:

Gradient einer skalaren Funktion

$$\varphi(x^\mu)$$

$$T_\mu = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right)$$

$$(T')_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\underline{\partial (x')^\mu}} = (\underline{\underline{L}}^{-1})_{\lambda\mu} T_\mu$$

$$(\underline{L}^{-1})_{\lambda\mu}$$

<u>$k=2$</u> Vierertensor 2. Stufe

($4^2 = 16$ Komponenten)

a) Kontravarianter Tensor

$$(T')^{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$$
$$= \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (x')^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$$

b) Kovarianter Tensor:

$$T'_{\mu\nu} = (\underline{L}^{-1})_{\alpha\mu} (\underline{L}^{-1})_{\beta\nu} T_{\alpha\beta}$$

c) gemischter Tensor 2. Stufe

$$(T')^{\nu}_{\mu} = (\underline{L}^{-1})_{\alpha\mu} L_{\nu\beta} T^{\beta}_{\alpha}$$

Beispiel:

Tensorprodukt aus einem Ko- und Kontravarianten Vierervektor

$$T_\mu{}^\nu = a^\nu \underbrace{b_\mu}_{\text{Komponenten des kovarianten Vektors}}$$

Skalarprodukt

$\Leftrightarrow$ gemischter Tensor 2. Stufe, wobei die Indizes gleich sind!

$$(b, a) \equiv b_\mu a^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} b_\mu a^\mu$$

ergibt (Lorentz invariantes) Skalar!

denn: $(b', a') = (b')_\mu (a')^\mu$

$$= (\underline{\underline{L}}^{-1})_{\alpha\mu}\, b_\alpha\, L_{\mu\beta}\, a^\beta$$

$$\Rightarrow (b', a') = (\underline{\underline{L}}^{-1})_{\alpha\mu}\, L_{\mu\beta}\, b_\alpha\, a^\beta$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial (x')^\mu} \cdot \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\beta} b_\alpha a^\beta$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} b_\alpha a^\beta$$

$$= \delta_{\alpha\beta} b_\alpha a^\beta = b_\alpha a^\alpha = (b, a)$$

Metrischer Tensor

wir hatten: $$dx^\mu = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$ Kontravariant!

Differential des Ereignisvektors im Minkowski-Raum

Zugehöriges Längenquadrat:

$$ds^2 = dx^{0\,2} - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2$$
$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Offensichtlich gilt:

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\lambda}\, dx^\mu\, dx^\lambda} \quad (*)$$

mit dem (kovarianten) metrischen Tensor

$$g_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

andererseits möchte man das
(Lorentzinvariante!) Längenquadrat auch
als Skalarprodukt schreiben!

$$ds^2 \stackrel{!}{=} (dx, dx)$$

$$= dx_\mu \, dx^\mu \qquad **$$

Vergleich mit *

$$\Rightarrow \boxed{dx_\mu = g_{\mu\lambda} \, dx^\lambda}$$

Durch Anwenden des metrischen Tensors kann man einen Kontravarianten in einen Kovarianten Vektor umwandeln!

Umkehrung:

Fordere: $dx^\mu \stackrel{!}{=} \underline{g^{\mu\lambda}} \, dx_\lambda$

Kontravarianter metrischer Tensor

Zusammenhang zu $g_{\mu\lambda}$??

$$dx_\mu = g_{\mu\lambda} \, dx^\lambda = g_{\mu\lambda} \, g^{\lambda\nu} dx_\nu \Rightarrow g_{\mu\lambda} \, g^{\lambda\nu} \stackrel{!}{=} \delta_{\mu\nu}$$

Folgerung:

$$g^{\mu\lambda} = g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$$

Ko- und Kontravarianten metrische Tensor sind identisch!

betrachte als Beispiel:

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\lambda} x^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \quad !!$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= x^0 \\ x_1 &= -x^1 \\ x_2 &= -x^2 \\ x_3 &= -x^3 \end{aligned}$$

Skalarprodukt:

$$(x, y) = x_\alpha y^\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta y^\alpha$$

$$= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

zwei beliebige Vierervektoren

Differentialoperatoren

- Gradient

a) Gradient bezgl. kontravarianter Komponenten:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

normaler Gradient

b) analog:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \dots = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

- Divergenz:

$$\partial_\mu x^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}x^0 + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}x^0 + \nabla \cdot \underline{r}$$

- d'Alembert-Operator

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Offensichtlich kann man schreiben:

$$-\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$= \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu$$

Der d'Alembert-Operator kann also als Skalarprodukt ausgedrückt werden

$\longrightarrow$ ist lorentzinvariant!