VI.7. Mechanische Größen (Auswahl)

Forderung:
- Alle mechanischen Größen müssen als Vierertensoren geschrieben werden
- Für $v \ll c$ Reproduktion der bekannten Resultate (TPI)

a) (Welt-) Geschwindigkeit

Verallgemeinerung des Ausdrucks $\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$??

wir hatten bereits

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - (d\underline{x})^2$$

Skalarprodukt

differentielle Längenquadrat zum Vektor $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(d\tau)^2 = \frac{1}{c^2}(ds)^2$$

$$= (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(d\underline{x})^2$$

$(ds)^2$ lorentzinvariant $\Rightarrow (d\tau)^2$ lorentzinvariant

da c in allen Bezugsystemen gleich!

Interpretation von $d\tau$?

betrachte ein mitbewegtes Bezugssystem

$$\Rightarrow (dx')^\mu = (c\,dt', 0, 0, 0)$$

Teilchen im Ursprung

hierfür folgt:

$$(d\tau)^2 = \frac{1}{c^2}(dx')^\mu (dx')_\mu$$

$$= (dt')^2$$

$\Rightarrow$ $d\tau$ entspricht dem Zeitintervall einer mitbewegten „Uhr" $\hat{=}$ Eigenzeit

Definition der Vierer- (oder "Welt"-) Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$ kontravarianter Vierervektor!

Zusammenhang mit $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$?

Umschreiben der Definition:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

Kettenregel

benötige
Zusammenhang zwischen dt und $d\tau$
(siehe Kap. VII, 4): $dt = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, d\tau$

oder direkt:

$$\cancel{c^2}(d\tau)^2 = c^2 (dt)^2 - (d\underline{r})^2$$
$$= c^2 (dt)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{(d\underline{r})^2}{(dt)^2}\right)$$
$$= c^2 (dt)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)^2\right) = \cancel{c^2}(dt)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Einsetzen:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\gamma}\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt}$$

$$\Rightarrow u^\mu = \gamma\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u^\mu &= \gamma\,(c, v_x, v_y, v_z) \\ &= \gamma\,(c, \underline{v}) \end{aligned}}$$ mit $v = \frac{dr}{dt}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow[v/c \to 0]{} 1$$

D.h. im Grenzfall $v/c \to 0$ erhält man also für die Raumkomponenten der Vierergeschwindigkeit gerade die normale Geschwindigkeit!

Norm-Quadrat :

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2)$$
$$= \frac{c^2 - v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c^2$$

b) <u>Viererimpuls, Energie</u>

definiere:

$$p^\mu \equiv \underset{\uparrow\ \text{Masse}}{m}\, u^\mu = m\gamma(c,\underline{v}) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(c,\underline{v})$$

Raumkomponenten:

$$p^{rel} = m\gamma\underline{v} = m\gamma(v_x, v_y, v_z)$$

(relativistischer Impuls)

Um die Analogie zum gewöhnlichen Impuls zu bewahren, definiert man (manchmal!)

$$m(\gamma) \equiv \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

relativistische Masse

„Ruhemasse" (Masse bei v=0)

Zur Norm des Viererimpulses

$$p^\mu p_\mu = m^2 \underbrace{u^\mu u_\mu}_{c^2} = m^2 c^2$$

Skalarprodukt, Lorentzinvariant!

Bezug zur Energie

~~Kin~~ nicht-relativist. Grenzfall: kinetische Energie eines Teilchens $T = \frac{m}{2} v^2$

Relativistische kinetische Energie:

$$T^{rel} = m\gamma c^2 = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 \quad (*)$$

Zusammenhang zum Viererimpuls:

$$p^\mu p_\mu = m^2 \gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 \underline{v}^2 = m^2 c^2$$

$$p^\mu = m\gamma (c, \underline{v})$$

offensichtlich gilt auch:

$$p^\mu p_\mu = \frac{(T^{rel})^2}{c^2} - \underbrace{m^2 \gamma^2 \underline{v}^2}_{(p^{rel})^2} = m^2 c^2$$

auflösen:

$$(T^{rel})^2 = m^2 c^4 + (p^{rel})^2 c^2$$

Betrachte kurz den Grenzfall kleiner Geschw. von T^{rel}

Startpunkt: $T^{rel} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2$

benutze $\lim_{x \to 0} (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots$

hier $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$

$$T^{rel} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Für sehr kleine v findet man also: $\boxed{T^{rel} \approx \frac{1}{2}mv^2 + mc^2}$

Formel für T^{rel} geht also nicht automatisch in den bekannten Ausdruck für T über!

Bemerkung zur Impulserhaltung

Aus dem Äquivalenzpostulat (Kap $\overline{\text{VII}}$.2) folgt:

$$\vec{p}^{\,rel} = const$$ bei kräftefreien Bewegung in allen Inertialsystemen!

(Impulserhaltung)

andererseits:

$$\vec{p}^{\,rel} \stackrel{\wedge}{=} \text{Raumkomponenten von } p^\mu$$

Kontravarianter Vierervektor

$$\boxed{p'^\mu = L_{\mu\nu}\, p^\nu}$$

$\Rightarrow$ bei einer Lorentztransformation werden also die Raum- und Zeitkomponenten von p^μ gemischt

$\Rightarrow$ Die neuen Raumkomponenten hängen auch von $\vec{p}^{\,rel}$ ab!

Damit folgt aus $\vec{p}^{\,rel} \stackrel{!}{=} const$

dann ist aus

$$T^{rel} \stackrel{!}{=} \text{const} \quad !$$

Impulserhaltung $\Longleftrightarrow$ Erhaltung der relativist. kinetische Energie !

VII.8. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

a) Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung)

wir hatten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underset{\text{Ladungsdichte}}{\rho(\underline{r},t)} + \nabla \cdot \underset{\text{Stromdichte}}{\underline{j}(\underline{r},t)} = 0$$

$$\underline{j} = \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}$$

experimentelle Erfahrung:

Die Gesamtladung q eines Teilchens (Moleküls ...) ist lorentzinvariant (sie hängt also nicht von $\underline{v}$ ab!)

Dies gilt aber nicht für die

Ladungsdichte !!

Grund: Längenkontraktion

$$\left(q = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r}) \right)$$

kleines Volumen dV (über $d\underline{r}$)

$$dq = \rho\, dV$$

- Sei Σ^0 ein mitbewegtes Inertialsystem, in dem die Ladung ~~ruht~~ ruht

$$\rho_0 = \frac{dq_0}{dV_0} \quad \text{„Ruheladungsdichte"}$$

- Sei Σ ein anderes Inertialsystem, das sich mit Geschw. $\underline{v}$ parallel zur z-Achse bewegt

$$\text{in } \Sigma: \quad \rho = \frac{dq}{dV}$$

es gilt: $\quad dq = dq_0 \quad$ (experimentelle Erfahrung)

$$\Leftrightarrow \rho_0\, dV_0 \overset{!}{=} \rho\, dV \quad (*)$$

benutze:

$$dV = dx\,dy\,dz = dx_0\,dy_0\,\underbrace{dz_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\text{Längenkontraktion}} = \frac{1}{\gamma}dV_0$$

Einsetzen in (*):

$$\rho = \frac{dV_0}{dV}\rho_0 = \gamma\rho_0$$

Folgerung für die Stromdichte

$$\vec{j} = \rho\underline{v}$$
$$= \gamma\rho_0\underline{v}$$

Definiere nun die Vierer-Stromdichte

$$j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$$
$$= (c\rho, \vec{j}) = (c\rho, \rho\underline{v})$$
$$\overset{(*)}{=} (c\gamma\rho_0, \gamma\rho_0\underline{v})$$

Verbindung zur Vierergeschwindigkeit

$u^\mu = \gamma(c, \underline{v})$

$$\rightarrow \boxed{j^\mu = \rho_0 u^\mu}$$

Ruheladung

beachte: j^μ ist kontravarianter Vierervektor!

<u>Test</u>: Im System Σ^0 gilt: $j_0^\mu = (c\rho_0, 0, 0, 0)$
(da $\underline{v} = 0$ in Σ^0!)

Lorentztransformation:

$$j^\mu = L_{\mu\lambda} j_0^\lambda$$

$$\text{mit } L_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

z.B.

$$j^0 = \gamma j_0^0 - \beta\gamma j_0^3 = c\gamma\rho_0$$

$$j'^1 = j_0^1 = 0$$

$$j'^2 = j_0^2 = 0$$

$$j'^3 = -\beta\gamma j_0^0 + \gamma j_0^3 = -\gamma v \rho_0$$

Zurück zur Kontinuitätsgleichung

es war: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$

betrachte:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\substack{\| \\ c\rho}}{j^0} + \nabla \cdot \underline{j}$$

Viererdivergenz

$$\Leftrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \underline{j} = 0$$

Kontinuitätsgleichung

⇒ Kovariante Formulierung der Kontinuitätsgl.

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

Beide Seiten der Gleichung sind Viererskalare!

⇒ Die Gleichung ist lorentzinvariant!