Wh:

a) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = 0$$

Ladungserhaltung

Führe neuen Vierervektor ein:

$$j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \underline{j})$$

$$j^\mu = \underbrace{\rho}_{\text{Ruheladungsdichte}} \underbrace{u^\mu}_{\text{Vierergeschw.}}$$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(j^0) + \nabla\cdot\underline{j} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\underline{j} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

Kontinuitätsgleichung ist Lorentzinvariant (da beide Seiten Skalar!)

b) Elektromagnetische Potentiale

wir hatten:

$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A}$$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

es folgt sofort:

$$\nabla\cdot\underline{B} = 0$$

$$\nabla\times\underline{E} = -\nabla\times\dot{\underline{A}} = -\dot{\underline{B}}$$

homogene Maxwell-Gl. !

Eichinvarianz:

$$\phi \to \phi - \dot{\chi}(r,t)$$
$$\underline{A} \to \underline{A} + \nabla \chi(\underline{r},t)$$

skalares Potential

Lorentz-Eichung: Wähle $\chi(r,t)$ so

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$$

$\Rightarrow$ Wellengleichungen:

$$\Box \underline{A} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A} = -\mu_0 j$$

$$(*) \quad \Box \phi = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\Leftrightarrow \Box\left(\frac{1}{c}\phi\right) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{1}{c}\phi\right) = -\mu_0 (c\rho) \qquad \boxed{c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

man erkennt: Die rechten Seiten enthalten gerade die Komponenten von j^μ !

beachte: $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -(\partial_\mu \partial^\mu)$ Skalar!

$\Rightarrow$ Führe als weiteren Vierervektor ein:

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi, A_x, A_y, A_z\right)$$
$$= \left(\frac{1}{c}\phi, \underline{A}\right)$$

aus ⊛ : $\boxed{\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu}$

Vierer-Wellengleichung !

Lorentzeichung:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{A^0}_{\frac{\Phi}{c}} + \nabla\cdot\underline{A} = 0$$

mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$

c) Felder

→ werden formuliert als Vierertensor 2. Stufe, der drei Komponenten von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ gleichrangig erfasst!

Ausgangspunkt:

$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A}, \quad \underline{E} = -\nabla\Phi - \dot{\underline{A}}$$

$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$

$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

betrachte Komponenten von $\underline{B}$:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2$$

$$= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)$$

analog:

$$B_y = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3)$$

$$B_z = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$$

Komponenten von $\underline{E}$:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} A^x = -c\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\phi\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A_x\right)$$

$$= c(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1)$$

analog:

$$E_y = c(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2), \quad E_z = c(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3)$$

Führe ein:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

„Feldstärke-Tensor"

Vierertensor 2. Stufe (kontravariant)

offensichtlich gilt:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \Rightarrow$$ Diagonalelemente sind Null!

explizit:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Zugehöriger kovarianter Tensor:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta}\, F^{\alpha\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

metrischer Tensor!

Beachte:

Betrachte Wechsel des Inertialsystems ($\Sigma \to \Sigma'$)

$$\left(F^{\mu\nu}\right)' = L_{\mu\alpha}\, L_{\nu\beta}\, F^{\alpha\beta}$$ (Kap IV.3.4.3)

L Matrix der Lorentztransformation (bekannt!)

$\Rightarrow$ Beim Wechsel des Inertialsystems mischen sich die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ — und damit ~~das~~ der Charakter der Felder!

Konkret findet man (hier ohne Herleitung)

$$\underline{E}' = \gamma\left(\underline{E} + c\,(\underline{\beta} \times \underline{B})\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\underline{\beta}\,(\underline{\beta}\cdot\underline{E})$$

$$\underline{B}' = \gamma\left(\underline{B} - \frac{1}{c}\,(\underline{\beta} \times \underline{E})\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\underline{\beta}\,(\underline{\beta}\cdot\underline{E}) \quad \text{mit } \underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c}$$

check! ?

beachte auch:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(\underline{B}^2 - \frac{1}{c^2}\,\underline{E}^2\right)$$

Vierer-Skalar!

$\Rightarrow$ bleibt unbeeinflusst von einer Lorentztransformation.

d) Maxwell-Gleichungen

betrachte zunächst die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla\cdot\underline{E} = \rho/\varepsilon_0 \Leftrightarrow \nabla\cdot\left(\frac{1}{c}\underline{E}\right) = \mu_0 c\rho$$
$$= \mu_0 j^0$$

$$\nabla\times\underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\underline{E}\right) = \mu_0 \underline{j} = \mu_0 \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}$$

Rechts stehen drei Komponenten vom Vierervektor j^μ

Linke Seiten?

„Probiere“:

$$\nabla\cdot\frac{1}{c}\underline{E} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$
$$= \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \partial_\alpha F^{\alpha 0}$$

weiter:

$$\left[\nabla\times\underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\underline{E}\right)\right]_x$$

$$= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}E_x\right)$$

$$= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \partial_\alpha F^{\alpha 1}$$

analog für die y- und z-Komponente!

Zusammenfassung:

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta} \quad (*)$$

inhomogene Maxwellgleichungen $\qquad \beta = 0,1,2,3$

<u>Bemerkungen</u>:

- Linke Seite von (*): Verjüngter (kontrahierter) Tensor dritter Stufe
  $\hat{=}$ (kontravarianter) Vierervektor
  — wie auf der rechten Seite von (*)!

- Eine Lorentztransformation wirkt sich auf beide Seiten gleich aus!

$\Longrightarrow$ Die (inhomogenen) Maxwellgleichungen gelten in (allen) Inertialsystemen!

homogene Maxwellgleichungen

$$\nabla\cdot\underline{B}=0\quad,\quad \nabla\times\left(\frac{1}{c}\underline{E}\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}=0$$

„probiere":

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\underline{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\\ &= \partial_1 F^{32}+\partial_2 F^{13}+\partial_3 F^{21}\\ &= \partial^1 F^{23}+\partial^2 F^{31}+\partial^3 F^{12}\\ &\overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

benutze

$$F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$$

$$\partial_\mu=-\partial^\mu \qquad \mu=1,2,3$$

$$\left[\nabla\times\frac{1}{c}\underline{E}+\frac{1}{c}\dot{\underline{B}}\right]_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}E_z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{c}E_y\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$= \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} - \partial_0 F^{23}$$

$$= -\left(\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23}\right) \overset{!}{=} 0$$

analog für y- und z-Komponente

Zusammenfassung:

$$\boxed{\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0}$$

homogene Maxwell-Gl. !! α, β, γ beliebig aus 0,1,2,3

<u>Bemerkungen:</u>

- Alle Terme sind Tensoren gleicher Stufe

  $\Rightarrow$ Die homogenen Gleichungen sind wieder forminvariant!

- Spezialfall: $\alpha = \beta$

$$\Rightarrow \partial^\alpha F^{\alpha\gamma} + \partial^\alpha \underbrace{F^{\gamma\alpha}}_{-F^{\alpha\gamma}} + \partial^\gamma \underbrace{F^{\alpha\alpha}}_{0}$$

$$\Rightarrow \partial^\alpha \big(\underbrace{F^{\alpha\gamma} - F^{\alpha\gamma}}_{0} \big) = 0$$

trivial!

$\Rightarrow$ Die Indizes α, β, γ sollten alle verschieden sein, damit wirklich die homogenen Maxwell-Gl. herauskommen!

VII.9. Bewegte Punktladungen

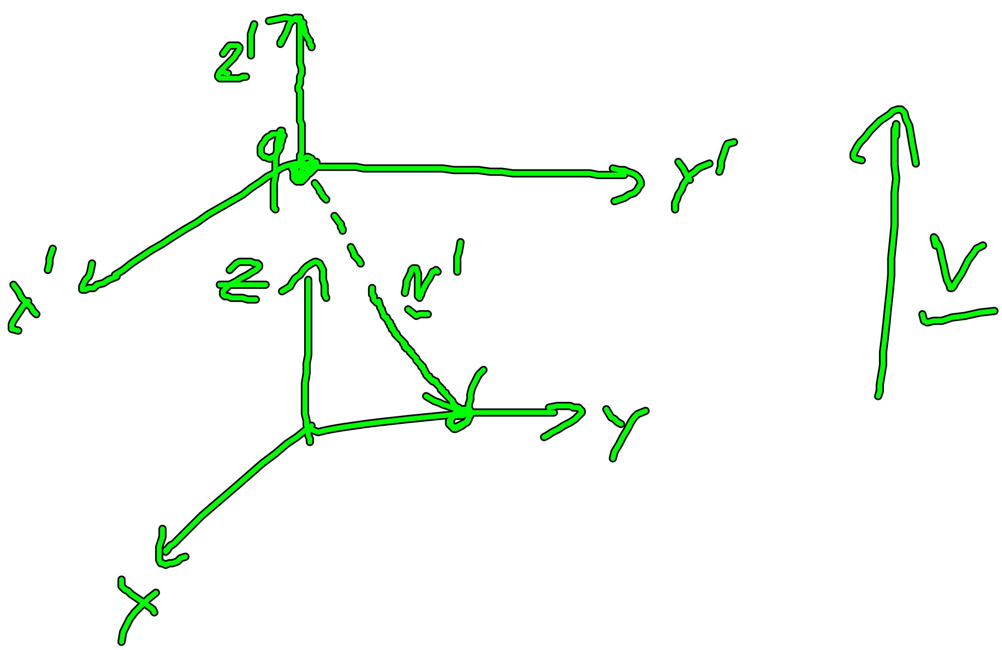
- 2 Inertialsysteme:

  Σ' bewegt sich mit $\underline{v} = v\,\hat{e}_z = \text{const}$

- Im Ursprung von Σ' ruht Ladung q
- In Σ sei ein „Beobachter"

  mit Position: $\underline{r}_p = (0, y_p, 0)$

  entsprechend Position in Σ': $\underline{r}' = (0, y_p, -vt')$



Frage: Welchen Felder sieht der Beobachter?

Zunächst: Felder in Σ' (Ruhesystem der Ladung)

$$\underline{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}'}{r'^3}$$ radiales, isotropes Feld einer Punktladung

$$\underline{B}' = 0$$

beachte:

die Beobachterposition ändert sich
(von Σ' aus gesehen) mit der Zeit

$$\rightarrow \quad \underline{E}' = \underline{E}'(t') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}(0, y_p, -vt')$$

$$\text{mit} \quad r' = \sqrt{y_p^2 + v^2 t'^2}$$

Felder in Σ?

(siehe Transformationsformeln in Kap. $\underline{\text{VII}}$.8)

~~todo~~ benutze $\underline{v} = -v\hat{\underline{e}}_z$

$$E_x = \gamma(\underbrace{E_x'}_{=0} + \beta c \underbrace{B_y'}_{=0}) = 0$$

$$E_y = \gamma(E_y' - \beta c \underbrace{B_x'}_{=0}) = \gamma E_y' = \frac{\gamma y_p}{\sqrt{y_p^2 + \gamma^2 v^2 t^2}^{\,3}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$E_z = E_z' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-\gamma v t)}{\sqrt{y_p^2 + \gamma^2 v^2 t^2}^{\,3}}$$

schließlich:

$$B_x = \gamma(\underbrace{B_x'}_{=0} - \beta/c\, E_y') = -\gamma \beta/c\, E_y' = \underbrace{-\beta/c\, E_y}_{\neq 0}\ !!$$

$$B_y = B_z = 0$$

Für allgemeine $\underline{v} = \text{const}$

folgt mit $\underline{B}' = 0$

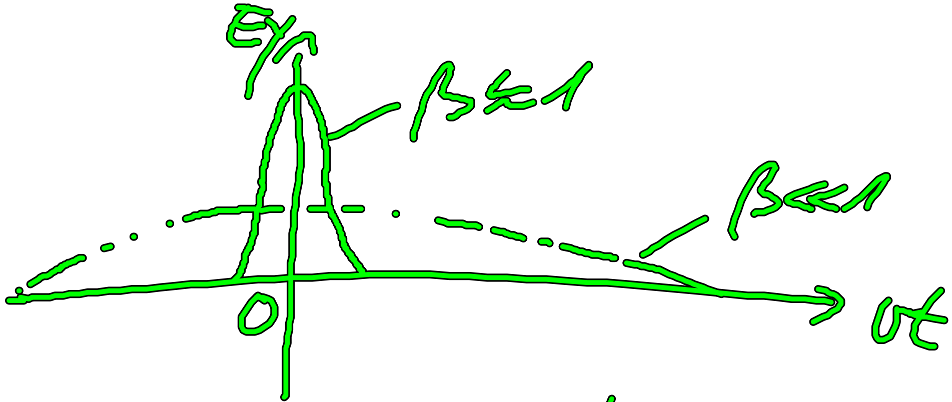
$$\underline{B} = \frac{\gamma}{c}\left(\frac{\underline{v}}{c} \times \underline{E}'\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma}{r'^3} (\underline{v} \times \underline{r}')\quad !!$$

Für $\gamma \to 1$ ($v/c \to 0$) entspricht dies dem bekannten Gesetz von Biot-Savart!

Bemerkungen zum $\underline{E}$-Feld in Σ

- Die "Transversalkomponente" E_y ist nur in einem kleinen Zeitintervall von Null verschieden!



$\beta = \frac{v}{c}$

• ~~Analog~~ Ähnlich für die "Longitudinalkomponente" E_z