Theoretische Physik VI: Vertiefung –
(Nichtlineare Dynamik und Kontrolle)

VL WS 2012/13 E. Schöll, K. Lüdge

Masterstudiengang Physik: • Pflichtvorlesung TP V / VI
(grundlagenorientiert)

- Wahlpflichtfach zusammen mit einer anderen ZGWS-Veranstaltung
- anwendungsorientierten Studiengang TP V oder TP VI

VL Do + Fr 10:15 – 11:45 EW 203

UE: Judith Lehnert

- Ergänzendes Seminar: Di 16^{00} – 17^{00} EW 731
  Numerische Methoden der nichtlinearen Dynamik

- Ergänzende VL: Mi 10^{00} – 11^{30}
  Nichtlineare Laserdynamik

Inhalte der VL

1. Dynamische Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlinearen Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle
4. Gekoppelte Systeme und Netzwerke
5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
6. Anwendungen auf Laser
7. Anwendungen auf Neurodynamik

1. Dynamische Systeme u. deterministisches Chaos

Zentrale Fragestellungen:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeit von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss
- geordnete oder ungeordnete (chaotische) Lösungen

Qualitative Dynamik: Fluss als Ganzes, Stabilität, topologische Struktur, Langzeitverhalten

1.1. Vektorfelder als dynamische Systeme

Dynamik nichtl. Systeme läßt sich als System von (nichtlin.) Differentialgleichungen 1. Ordnung formulieren.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$

Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Bewegungsgleichung mit Reibung

$$\ddot{y} + f_1(y,t)\,\dot{y} + f_2(y,t) = 0$$

Reibung $\qquad\qquad$ Kraft

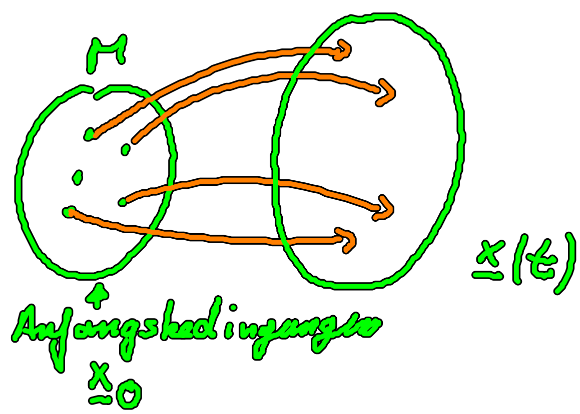
$$\left.\begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 \end{array}$$

Speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{array} \qquad H(q,p) \text{ Hamiltonfkt.}$$

<u>Fluss des Vektorfeldes</u> $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M (Phasenraums, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\phi : M \times \mathbb{R}_t \longrightarrow M$$



mit $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0)$

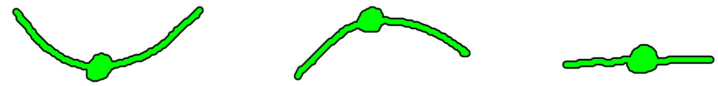
$\qquad = \underline{x}(t : \underline{x}_0)$

(Gesamtheit der Bahnkurven = Trajektorie)

• <u>Fixpunkte $\underline{x}^*$ des autonomen dynamischen Systems</u> $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

$$0 \overset{!}{=} \dot{\underline{x}} = F(\underline{x}^*) \quad \longrightarrow \quad \underline{x}^*$$

- <u>Stabilität eines Fixpunktes</u>



Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen

$\delta \underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\boxed{\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x^*} \delta x_k}$$

$$\boxed{\delta \dot{\underline{x}} = (DF)_* \; \delta \underline{x}}$$ mit Jacobi-Matrix DF

$A = (DF)_*$

System von linearen Dgl.'s mit konst. Koeffizienten

<u>Lösungsansatz</u> $\delta \underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

<u>Eigenwertgleichung</u>

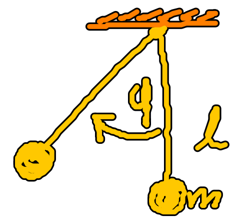
$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ liefert

$\left.\begin{array}{l} \lambda_k : \text{Eigenwerte} \\ \underline{\xi}^{(k)} : \text{Eigenvektoren} \end{array}\right\}$ der Jakobi-Matrix $A = DF_*$

allgemeine Lösung: $\delta \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k
c_k durch Anfangsbedingungen bestimmt)

<u>Beispiele</u>: (i) Ebenes Pendel



$$m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin\varphi = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 \end{array}$$

Fixpunkte: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = n \cdot \pi \end{array} \quad (n = 0, 1, \ldots)$

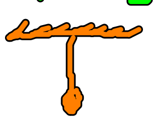
2 Fixpunkte!

<u>Linearisierung</u>

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{DF} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) Fixpunkt mit $n = 0$

$x_1 = x_2 = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & -\lambda \end{vmatrix}$

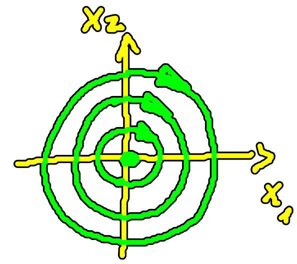
$$= \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

R rein imaginär!

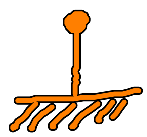
$$\Rightarrow \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

<u>ungedämpfte Schwingung</u>.



<u>Zentrum</u>

b) $x_1 = \pi$
$x_2 = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & -\lambda \end{vmatrix}$

$$= \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

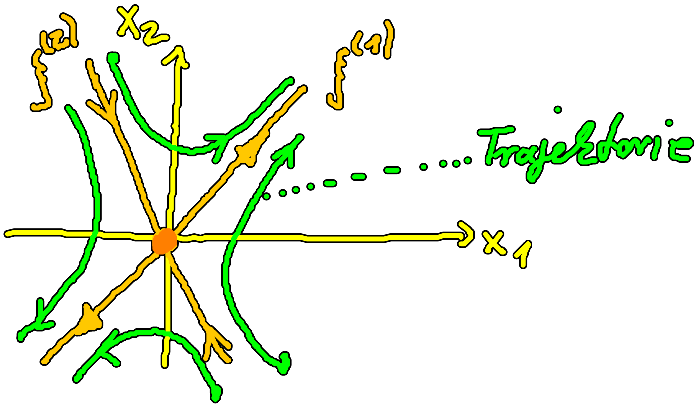
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

allgemeine Lösung $\delta\underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}$

$t \to \infty$

instabil entlang der Richtung $\xi^{(1)}$

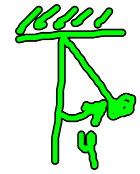
stabil



Sattelpunkt

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{2\gamma}_{\text{Reibung}}\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$



$x_1 = \varphi$

$x_2 = ml^2\dot{\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 &= -mgl\sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}\right\} \text{Fixpunkte ungeändert}$$

Linearisierung:
$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl\cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) Fixpunkt $x_1 = x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$$

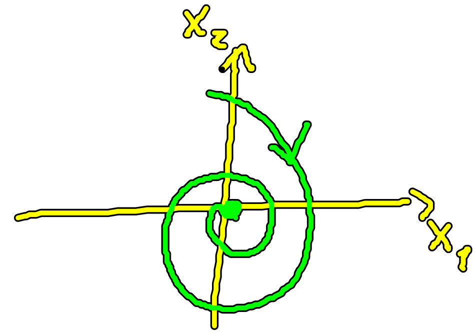
Eigenwerte:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

(schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

(a_1) gedämpfte Schwingungen
(schwache Reibung)

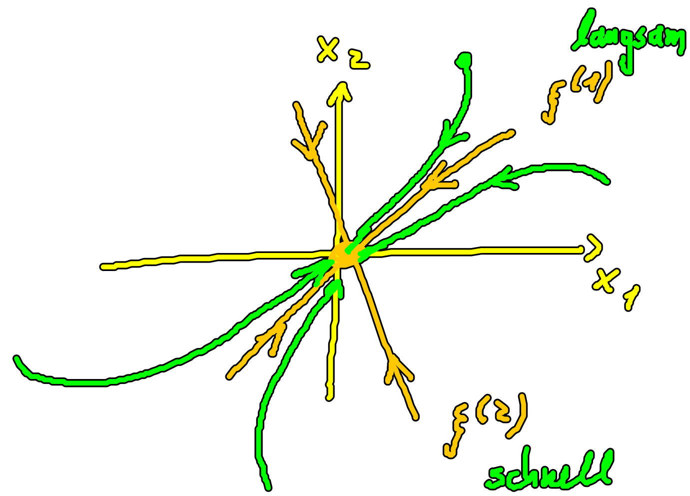


Stabiler Fokus
stabil!

(a_2) aperiodische gedämpfte Schwingung
(starke Reibung)

$\gamma^2 > \omega^2$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$



Stabiler Knoten

b) Fixpunkt $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$
bleibt Sattelpunkt