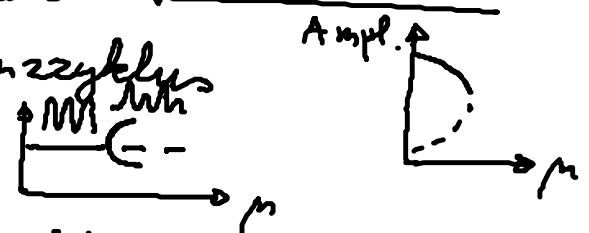


(C) Lokale Bifurkation von Grenzzyklen (Forts.)

- (C1) Sattel-Knoten-Bif. eines Grenzzyklus
- (C2) Perioden-Verdopplung



- (C3) Sacker - Neimark - Bifurkation
(sekundäre Hopf-Bif. eines Limit Cycle LC)



1. Hopf-Bif. des Fixpkt. : $\phi_1 = \omega_1 t$
2. Hopf-Bif. des LC : $\phi_2 = \omega_2 t$

LC \rightarrow 2-Torus

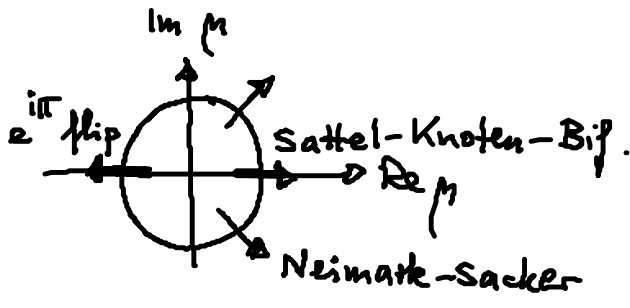
mind. 3D Phasenraum

inkommensurable Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
(quasiperiodisch) irrational

\Rightarrow Trajektorie schließt sich nicht, liegt dicht auf dem Torus

falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ geschlossener Orbit = LC
(frequency locking)
Modenkopplung

Instabilität von Grenzzyklen: Floquet-Multiplikator
 $\mu = e^{\lambda T}$



Stab. Grenze $|\mu| = 1$

oder transkrit.

(D) Globale Bifurkation von Grenzzyklen

globale qualitative Änderung des Phasenporträts,

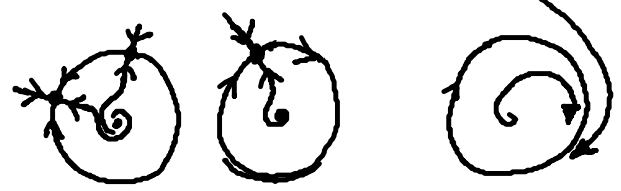
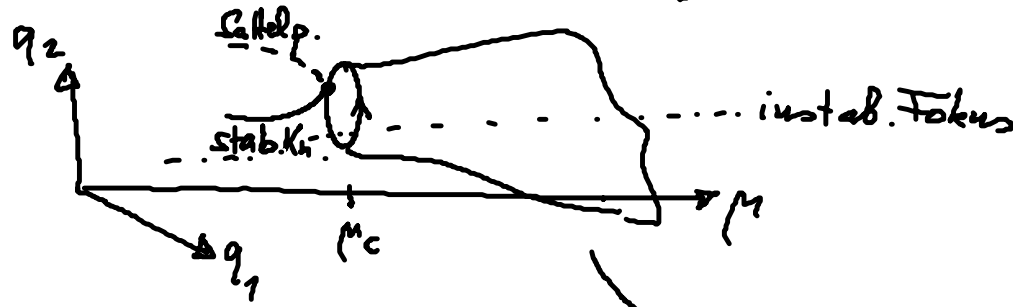
z.B. homoklin. Orbit
invar. Mannigfalt. des Sattelpunktes.



(D1) Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus (Omega explosion)

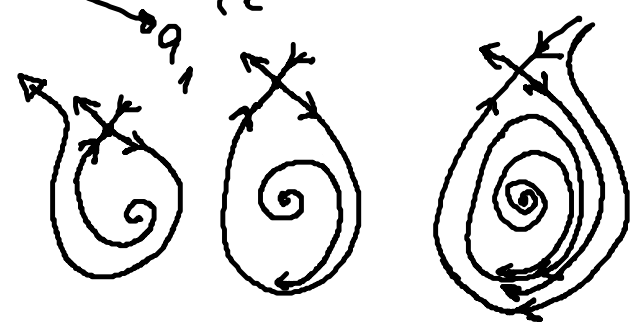
saddle-node infinite period (SNIPER)
 saddle-node on invariant cycle (SNIC)

Amplitude $\neq 0$
Frequ. $\rightarrow 0$



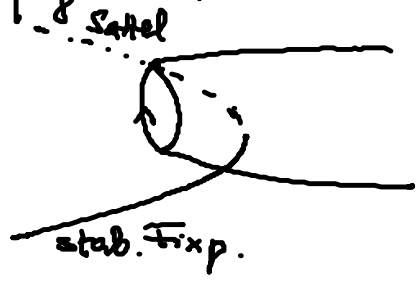
(D2) Homokline Bif. (blue-sky catastrophe)

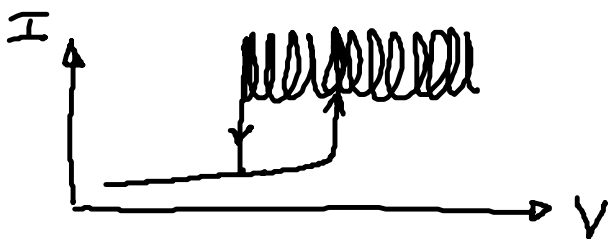
Sattelpkt. kollidiert mit LC: homokliner Orbit (saddle-to-saddle) loop



Ampl. $\neq 0$
Frequ. $\rightarrow 0$

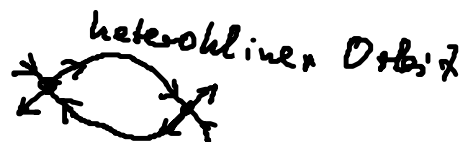
häufig Bistab. zwischen Osz. u. Fixpht., z.B.





z.B. Halbleiterbauelemente

(Schöll: *Nonlin. Spatio-Temp. Dyn. and Chaos in Semicond.*, Cambridge 2001)



Einfaches generisches Modell für SNIPER

(Ditzinger, Ning, Hu: PRE 50, 3508 (94))

Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 87 (93)

Hizanidis, Amst, Schöll: Int. J. Bif. Chaos 18, 1759 (08)

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) + y(x - b)$$

$$\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) - x(x - b)$$

in Polarkoordinat. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\varphi} = b - r \cos \varphi$$

$b > 0$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $r = 0$ (immer instab. Fokus, \ddot{u})

$$r = 1, \quad b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (b < 1)$$

für $b > 1$: LC mit $r = 1$, $\dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \int_0^T dt = T$$

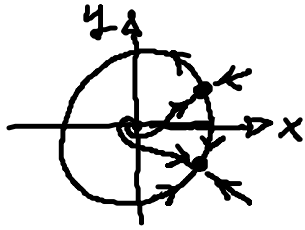
Bif. pkt.: $b = 1$: $T \rightarrow \infty$ (Frequ. $\rightarrow 0$) $T \approx \frac{1}{\sqrt{b-1}}$

Fixpunkte auf dem Kreis $r = 1$:

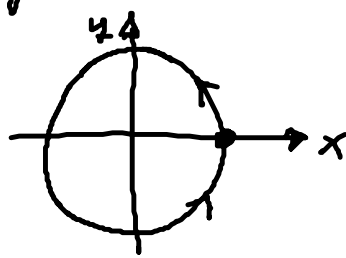
$$(x^*, y^*) = (b, +\sqrt{1 - b^2})$$

$$= (b, -\sqrt{1 - b^2})$$

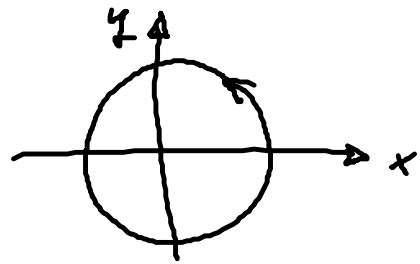
Sattel-Knoten-Bif. : $b = 1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(Anregbarkeit)
Typ I

→ Anwendung Neurodynamik
(spiking von Neuronen,
s. Kap. 7)

Adler-ge. $\dot{\varphi} = b - r \cos \varphi$

Anwendung auf
optisch injizierte Laser