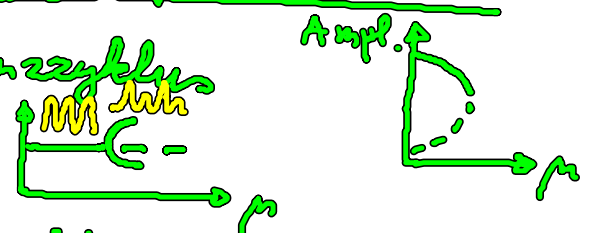
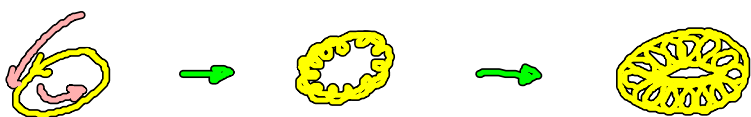


(C) Lokale Bifurkation von Grenzzyklen (Forts.)

- (C1) Sattel-Knoten-Bif. eines Grenzzyklus
- (C2) Perioden-Verdopplung



- (C3) Sacker - Neimark - Bifurkation  
(sekundäre Hopf-Bif. eines Limit Cycle LC)



- 1. Hopf-Bif. des Fixpkt.:  $\phi_1 = \omega_1 t$
- 2. Hopf-Bif. des LC :  $\phi_2 = \omega_2 t$

LC  $\rightarrow$  2-Torus

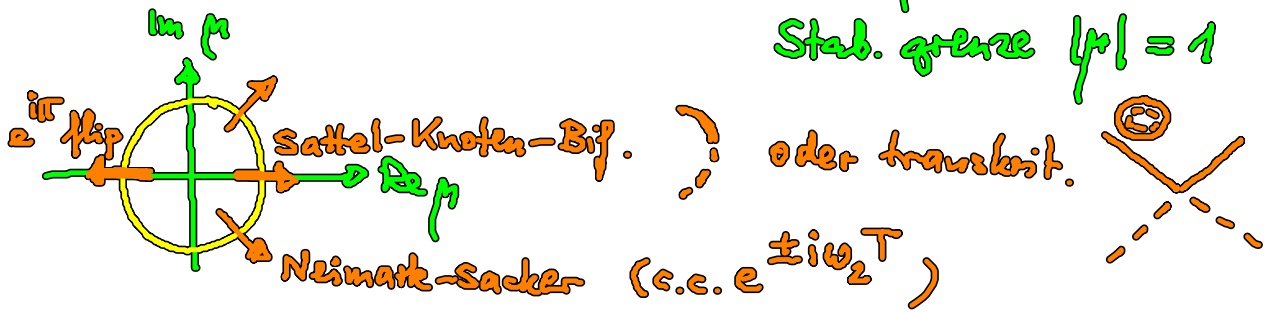
mind. 3D Phasenraum

inkommensurable Frequenzen  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$   
(quasi-periodisch) irrational

$\Rightarrow$  Trajektorie schließt sich nicht, liegt dicht auf dem Torus

falls  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  geschlossener Orbit = LC  
(frequency locking)  
Modenkopplung

Instabilität von Grenzzyklen: Floquet-Multiplikator  
 $\mu = e^{\lambda T}$



### (D) Globale Bifurkation von Grenzzyklen

globale qualitative Änderung der Phasenpartikels,

z.B.



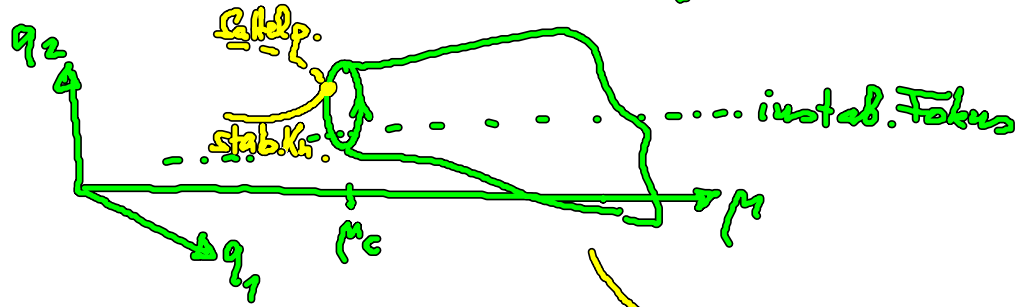
invar. Mannigfalt.  
des Sattelpunkts.



(D1) Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus (Omega explosion)

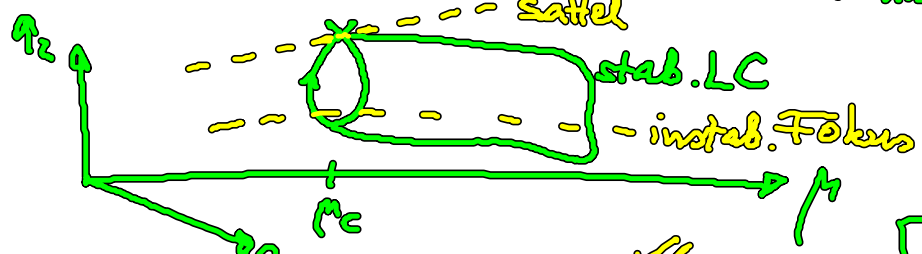
saddle-node infinite period (SNIPER)  
 saddle-node on invariant cycle (SNIC)

Amplitude  $\neq 0$   
 Freq.  $\rightarrow 0$



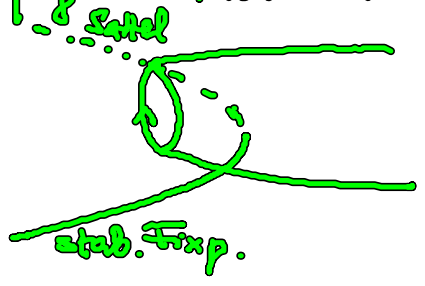
(D2) Homokline Bif. (blue-sky catastrophe)

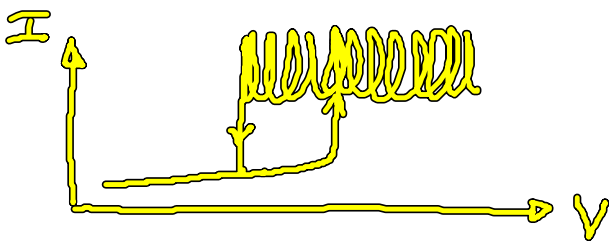
Sattelpkt. kollidiert mit LC: homokline Orbit (saddle-to-saddle) loop



Ampl.  $\neq 0$   
 Freq.  $\rightarrow 0$

häufig Bistab. zwischen Ose. u. Fixpt., z.B.





z.B. Halbleiterbauelemente  
 (Schöll: Nonlin. Spatio-Temp. Dyn. and Chaos in Semicond., Cambridge 2001)



## Einfaches generisches Modell für SNIPER

(Ditzinger, Ning, Hu: PRE 50, 3508 (94)  
 Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 87 (93)  
 Hatzivichis, Auer, Schöll: Int. J. Bif. Chaos 18, 1759 (08)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarkoordinat.  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} &= b - r \cos \varphi \end{aligned} \quad b > 0 \quad \begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte:  $r=0$  (immer instab. Fokus,  $\ddot{u}$ )  
 $r=1$ ,  $b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b$  ( $b < 1$ )

für  $b > 1$ : LC mit  $r=1$ ,  $\dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$

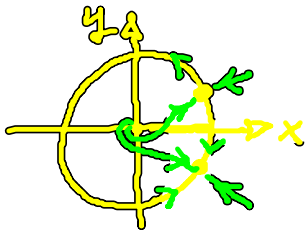
$$\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \int_0^T dt = T$$

Bif. pkt.:  $b=1$ :  $T \rightarrow \infty$  (Frequ.  $\rightarrow 0$ )  $T \sim \frac{1}{\sqrt{b-1}}$

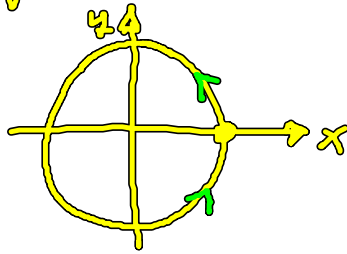
Fixpunkte auf dem Kreis  $r=1$ :

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (b, +\sqrt{1-b^2}) \\ &= (b, -\sqrt{1-b^2}) \end{aligned}$$

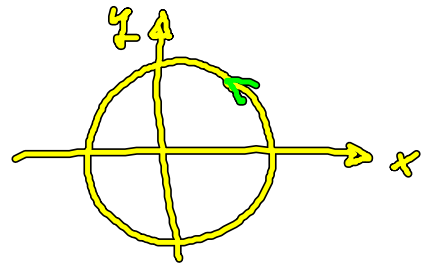
Sattel-Knoten-Bif. :  $b=1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(Anregbarkeit)  
Typ I

→ Anwendung Neurodynamik  
(spiking von Neuronen,  
s. Kap. 7)

Adler-Gl.  $\dot{\varphi} = b - r \cos \varphi$

Anwendung auf  
optisch injizierte Laser