

## (E) Bifurkation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \rho) + D \Delta \underline{q}$$

Diff. konst.  $D$

lineare Stab. der Fixpunkte (räuml. homogen):

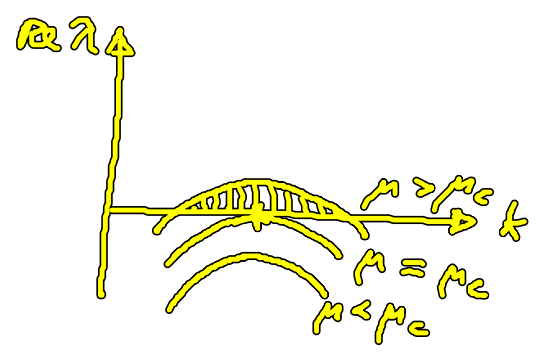
$$\underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$$

⇒ Dispersionsrel.  $\lambda(\underline{k})$

⇒  $\operatorname{Re} \lambda(\underline{k}) < 0$  stabil  
 $> 0$  instabil

= 0 Bif. von räuml.-period. Lösungen mit Wellenvektor  $\underline{k}$

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q^*) - D_{ij} k^2$$



(E1) Turing - Instabilität

$\lambda(\underline{k}) = 0$  bei  $|\underline{k}| = k_c \neq 0$   
 stat., räumlich period. Struktur mit  $k_c$  bifurkiert

(z.B. langsam diffundierender Aktivator + schnelle Inhibitor)

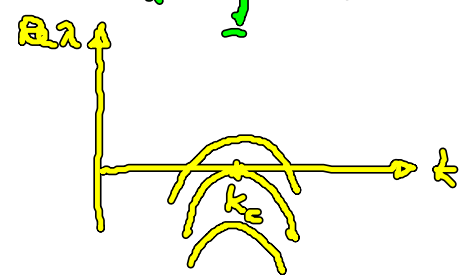
$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

(E2) Stehende / laufende Wellen

$\lambda(k) = \pm i\omega$  bei  $|\underline{k}| = k_c \neq 0$  am Bif.pkt.  
 Osz., räum. period. Struktur  $\rightarrow$  Wellen  $\delta q \sim e^{i(\underline{k}x \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

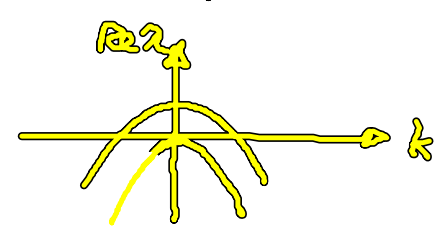


(E3) Hopf - Bifurkation

$\lambda = \pm i\omega$  bei  $k = k_c = 0$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml. - homogener Grenzzyklus



1.4 Deterministisches Chaos

Deterministische, aber ungeordnete Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit  $n \geq 3$  (autonom): seltsamer (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

|  |   |   |
|--|---|---|
| quasiperiod.   | determinist. Chaos                        | stochastisch (Rauschen)   |
| wenige dyn. Freiheitsgrade:<br>niedrig-dim. Phasenraum |   | viele mikroskop. Freiheitsgrade<br>(statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$ |
| Attraktor: Torus<br>$T^d$ mit $d=2,3,4,\dots$          | seltsamer Attraktor<br>mit fraktaler Dim. |   |

Autokorr. fkt.  $\langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt$

quasiper. in  $\tau$  (Schwebung)  $\rightarrow 0$  für  $\tau \rightarrow \infty$   $\quad \quad \quad = 0$  für  $\tau \geq \tau_c$

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$ )  
power spectrum  
Wiener-Khinchin

diskrete Freq.  
 $\omega_1, \omega_2, \dots$

breites Frequenzband

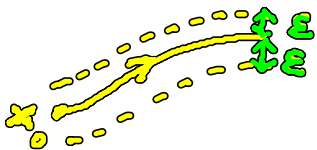
Instab. der Bewegung  
bei kleinen Störungen  
der Anfangsbed.

typ. universelle  
Bifurk. szenarien

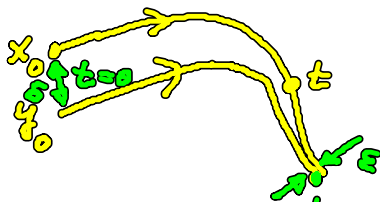
Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich  
von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen Variationen  
der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität):

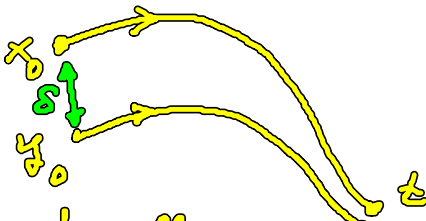


bahnstabil  
(alle benachbarten  
Bahnen bleiben in  
einer Röhre um  $\phi(t, x_0)$ )



asymptot. bahnstabil  
(Abstand der benachbarten Bahnen  $\rightarrow 0$   
für  $t \rightarrow \infty$ )

# Ljapunov / asymptot, stabil



für dieselbe  $t$  gilt  $|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve  $\phi(t, x_0)$ :

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$ : Eigenwerte  $\lambda_k(t)$ , Eigenvektor  $\underline{\xi}^{(k)}(t)$

formale Lösung:

$$\delta \underline{x}(t) = e^{\int_0^t \underline{A}(t') dt'} \delta \underline{x}(0)$$

zeitents. einer infinites. Kugel um  $\underline{x}_0$

→ n-dim. Ellipsoid mit Hauptachsen  $p_k(t) \approx p_k(0) e^{\lambda_k t}$

Def.: Stab. ist bestimmt durch die Ljapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$$

NB: Führender (größter) Ljapunov-Exp.

$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\underline{x}(t) - \underline{y}(t)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

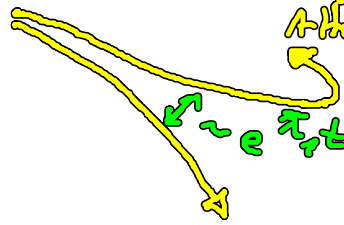
$\lambda < 0$ : kleine Abweichungen der Anf. bed. expon. gedämpft

$\lambda > 0$ : expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

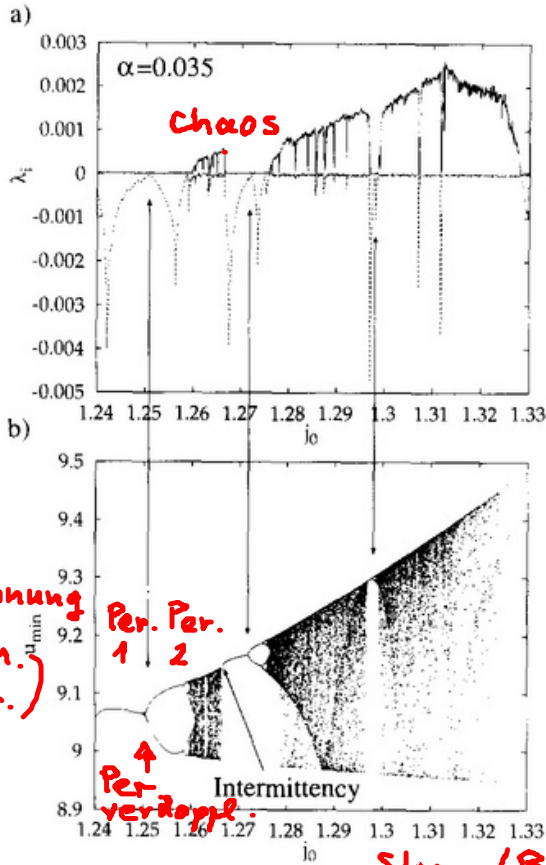
≙ definierendes Kriterium für Chaos

Chaotischer Attraktor in  $\mathbb{R}^3$ :  $\bar{\lambda}_1 > 0$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 < 0$

instab.  
Beweg.  
auf dem  
Attraktor



S. Bose et al. / Physics Letters A 195 (1994) 144-150



Spannung  
(dyn. Var.)  
 $V_{\min}$

Per. 1  
Per. 2  
↑  
Per. verdoppelt  
Intermittency

Strom (Bif. par)

Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for  $\alpha = 0.035$

Modell einer Halbleiterstruktur  
(heterostructure Hot Electron Diode)

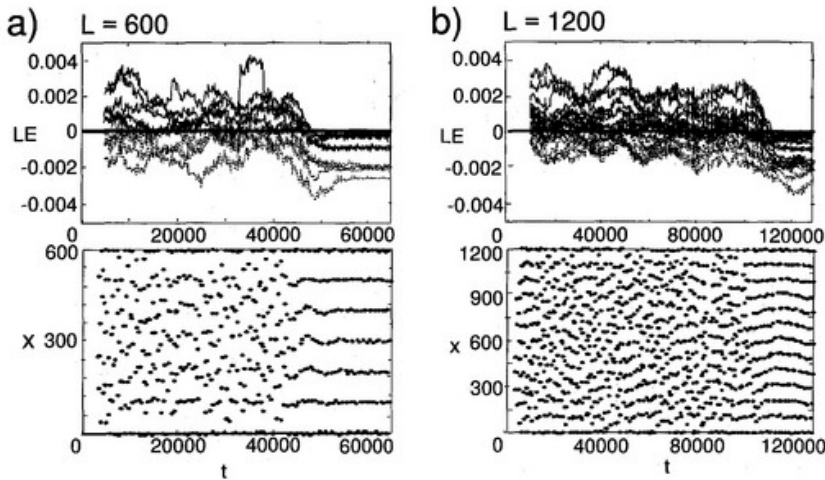


Fig. 2. Transient spatio-temporal chaos for different system sizes (a)  $L = 600$  and (b)  $L = 1200$ . The upper row shows the evolution of the local Lyapunov exponents (LE), and the lower row shows the space-time plot of the maxima of the current density  $j = u - a$  ( $\alpha = 0.02$ ,  $D = 8.0$ ,  $j_0 = 1.21$ ,  $T = 0.05$ ).

Reaktion-Diff.-System

(transientes Chaos)  
extensives Chaos

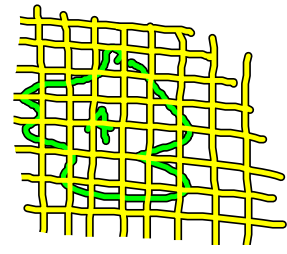
↓  
Zahl der pos. Lyapunov-Exp  
~ Systemgröße

Quantitative Formulierung der fraktalen Dim. des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge  $A$  in  $\mathbb{R}^d$

Sei  $N(\epsilon)$  die Mindestzahl von  $n$ -dim. Würfeln mit Seitenlänge  $\epsilon$ , um  $A$  zu überdecken. Dann ist



$$d := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

die fraktale (Hausdorff-) Dim.

(d.h.  $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$ )

Beispiel: Punkt  $N(\epsilon) = \text{const}$

Linie  $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon}$

Fläche  $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^2}$

Vol.  $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^3}$

$d=0$

$d=1$

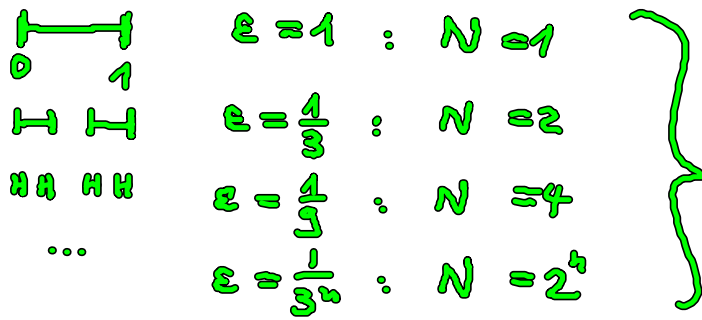
$d=2$

$d=3$

Chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$ : Volumen  $\rightarrow 0$

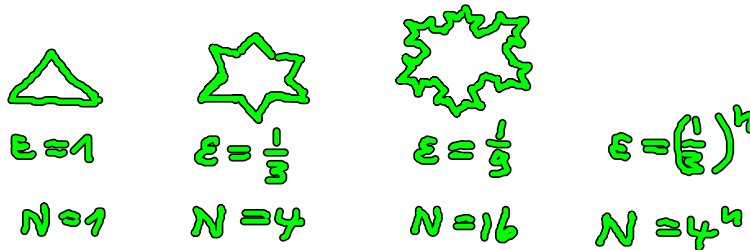
$\rightarrow d < 3$ ; aber  $d > 2$ : z.B. Lorenz-Modell  $d \approx 2.05...$

## Beispiel : Cantormenge (selbstähnliche Struktur)



$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309...$$

## Beispiel : Koch's Kurve (Schneeflocke)



$$\text{Umfang} = 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow d > 1$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

analog: Meeresküste

$1 < d = 1.2618... < 2$   
(zwischen Kurve und Fläche)