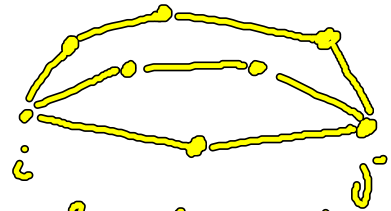
4.2.1 Topologie des Netzwerkes (Forts.)

mittlere Pfadlänge (globale Eigenschaft)

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{ij} d_{ij}$$

$N(N-1)$ = max. Zahl der Links

kürzeste Verbindung zweier Knoten:

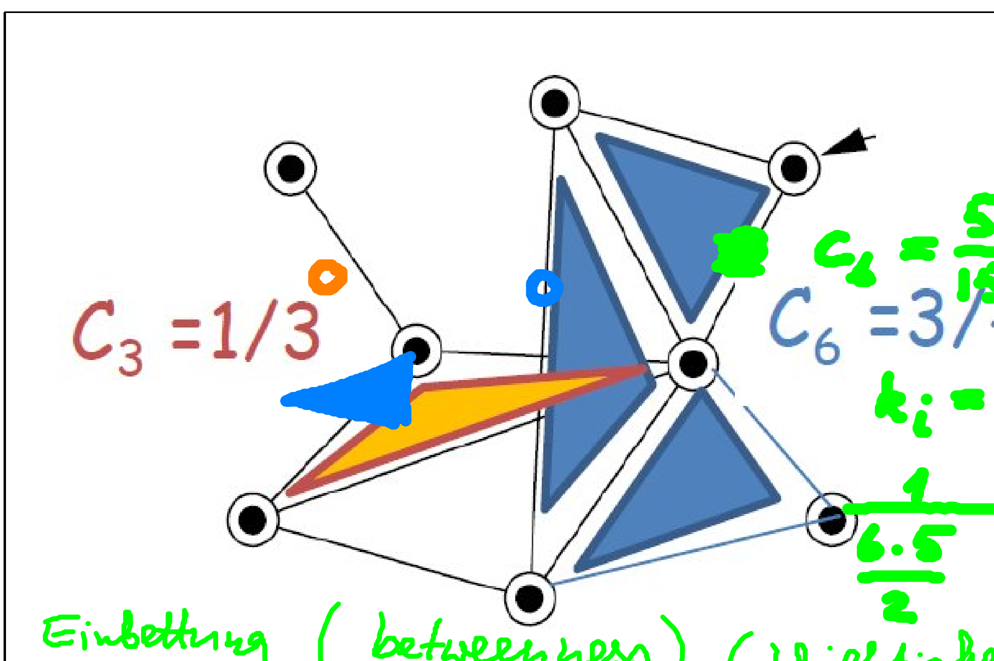


$$d_{ij} = \min_{P_{ij}} \sum_{kl \in P_{ij}} a_{kl}$$

$P_{ij} = \{$Pfade zwischen i und j$\}$

Clusterkoeffizient (lokale Eigenschaft, Cliquenbildung, $0 < C_i < 1$)

$$C_i = \underbrace{\frac{1}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}}_{\text{Anzahl der max. möglichen Dreiecke, die i enthalten}} \underbrace{\sum_{jk} a_{ij} a_{ik} a_{jk}}_{\text{Anzahl von angrenzenden Dreiecken}}$$



$C_6 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$k_i = 6$

$\frac{1}{\frac{6 \cdot 5}{2}} = \frac{1}{15}$

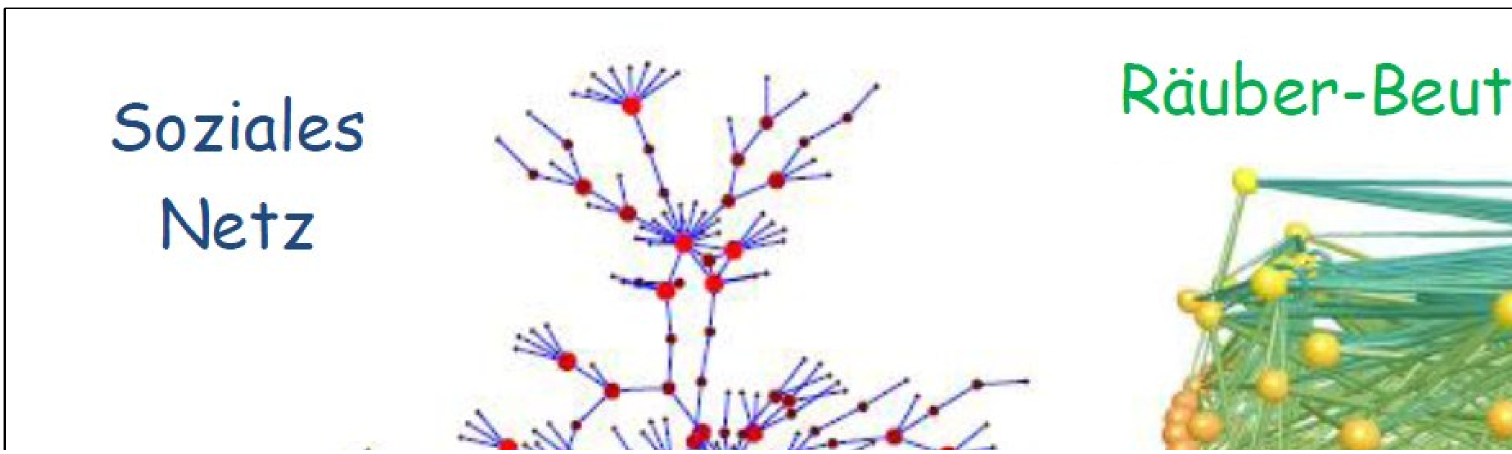
Einbettung (betweenness) (Wichtigkeit des Knoten)

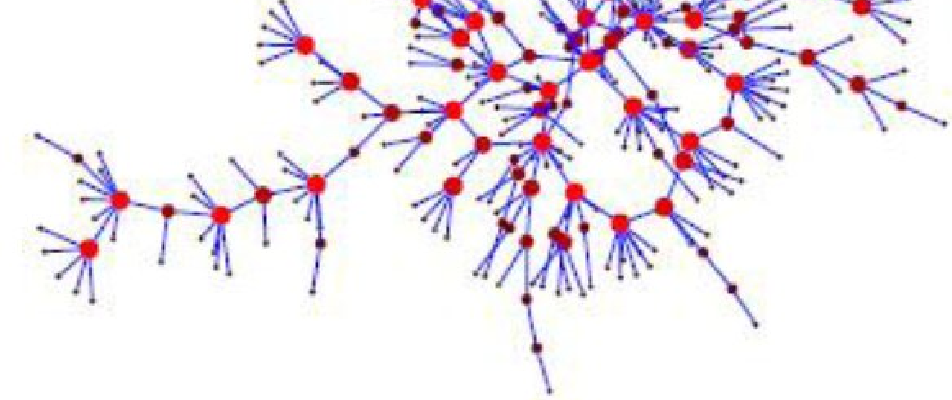
Anzahl der Pfade, die durch den Knoten laufen

Closeness : inverser mittlerer Abstand von allen anderen Knoten

Mischungsmuster : Netzwerk mit verschiedenen Knoten

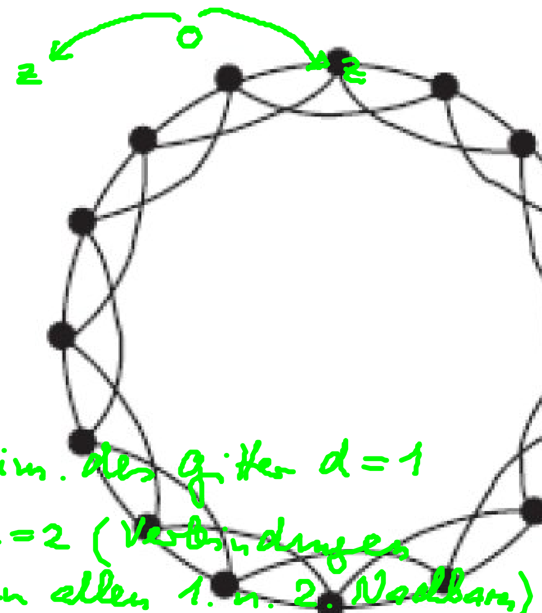
- assortative mixing : Präferenz für Verbindung gleicher Knoten
- disassortative mixing : Präferenz für Verbindung ungleicher Knoten





Beispiel: Reguläres Netzwerk

Ring



- Jeder mit jedem der $m = 2z$ nächsten Nachbarn verbunden
  - konstante Knotenordn. $k_i = 2z = \langle k \rangle$
  - degree distribution $P(k) = \delta_{k,m}$
  - mittl. Pfadlänge $\ell \sim N^{1/d}$
  - Clusterkoeff. $C = \frac{3\cancel{z}(z-1)}{\frac{2\cancel{z}(2z-1)}{\cancel{2}}}$

    (groß, $\lesssim 1$)

Dim. des Gitter $d = 1$

$z = 2$ (Verbindungen zu allen 1. u. 2. Nachbarn)

- Kleine Netze: Auge k
  Struktur charakterisi
- Große Netzwerke: St
  Kenngrößen nötig
  (geeignete Mittelwerte)

Beispiel: Zufälliges Netzwerk

(Erdős – Rényi 1960)

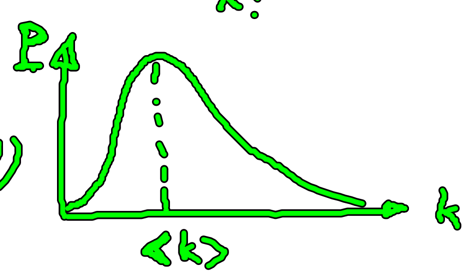
Ausgangspunkt: globale Kopplung (all-to-all), vollständiger Graph

$\frac{N(N-1)}{2}$ links

Jetzt: Jeder Link ex. mit Wahrscheinlichkeit p

$\longrightarrow$ Knotenverteilung $P(k) = \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}$

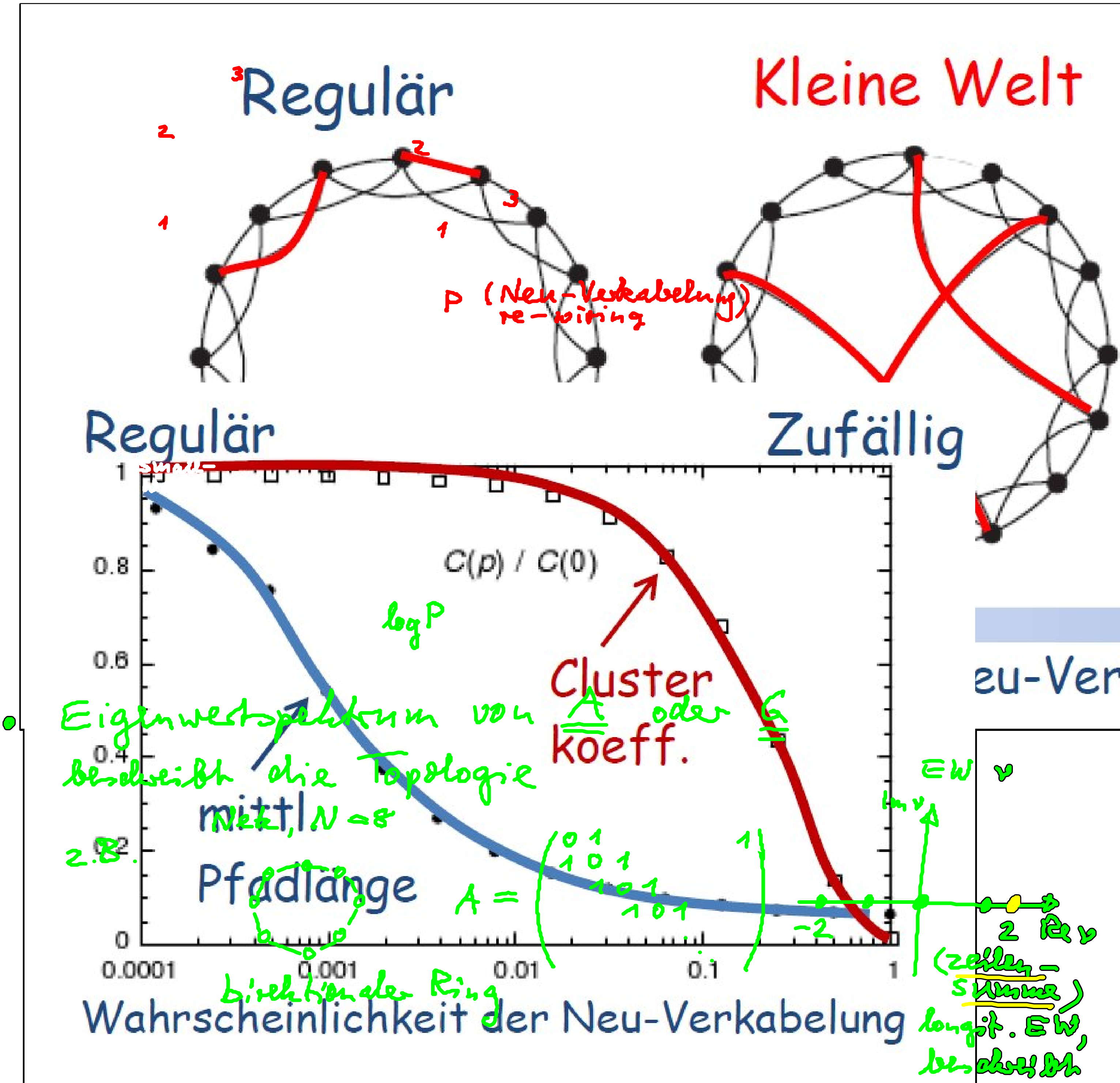
(Poisson-Statistik)

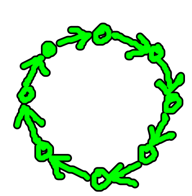


- mittlere Knotenordn. $\langle k \rangle = p(N-1)$
- mittlere Pfadlänge $\ell = \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$
  (klein bei großem N)

— Clusterkoeff. $C = \frac{\langle k \rangle}{N} \approx p$
(→ 0 für großen N und endl. $\langle k \rangle$)

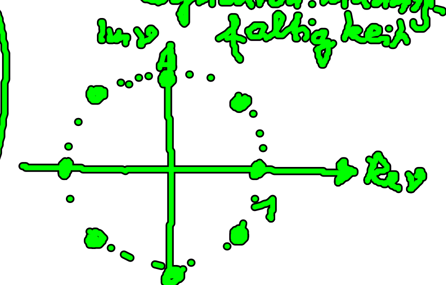
Beispiel: Kleine-Welt-Netzwerk (small world)





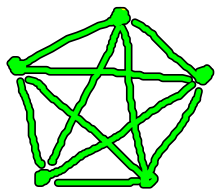
unidirektionaler Ring

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}$$



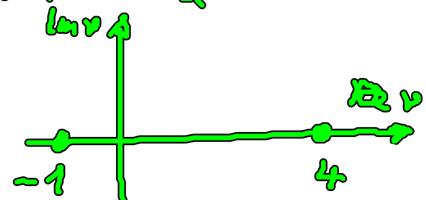
$$\nu_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

Eigenwerte liegen auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene



vollständiges Netz
(all-to-all)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(N−1)fach entartet

(Zeilensumme von A)
longit. EW
(Sync)

4.2.2 Kopplungsschemata

dynam. Var. auf jedem Knoten $x_i \in \mathbb{R}^m$

– Kopplungsschema $\underline{\underline{H}}_{ij}$ ($m \times m$ Matrix) gibt an, wie die Variablen der Knoten i und j koppeln

$\Rightarrow$ dynam. Gln.

Beispiel: gekoppelte Laser: dyn. Var. $\underline{x} = \begin{pmatrix} E \\ n \end{pmatrix}$ el. Feld, Ladungsträgerdichte

$m = 2$, z.B. $H_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Feld koppelt an Feldvariable

– opt. Kopplung: Feldvar. i an Feldvar. j

– elektroopt. Koppl.: Feldvar. i an Ladungsträgervar. j

– Selbstkopplung (Lang-Kobayashi-Modell): Feld i koppelt an Feld i

2 Hopf-Normalformen (§4.1): $x = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix}$

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇒ Differenzialgleichungssystem aller Elemente
$x_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, N$ (m Dim. des Phasenraumes eines Elements)

$$\dot{\underline{x}}_i = \underbrace{\underline{F}_i(\underline{x}_i)}_{\text{lokale Dyn., z.B. Hopf-Normalform}} + \underbrace{\sigma}_{\text{Kopplungsstärke}} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{a_{ij}}_{\text{Topologie } (N \times N)} \underbrace{\underline{\underline{H}}_{ij} \underline{x}_j}_{\text{Kopplungsschema } (m \times m)}$$

<u>zeitverzögert gekoppelte Netzwerke:</u>

- direkte Kopplung (pseudo-diffusive)

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i(\underline{x}_i) + \sigma \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \underline{\underline{H}}_{ij} \underline{x}_j (t - \tau_{ij})$$

Beispiel: Laser mit Feedback
($N = 1$, $a_{ij} = 1$,
$\tau_{11} = \tau_{ex}$ (round-trip-Zeit zum Spiegel))

- diffusive Kopplung

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i(\underline{x}_i) + \sigma \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot \underline{\underline{H}}_{ij} \cdot [\underline{x}_j (t - \tau_{ij}) - \underline{x}_i (t)]$$

Beispiel : Neuronenkopplung
Input ist Potenzialdifferenz

Bem. : Beides ineinander umzuformen durch

$$\underset{\sim}{\tilde{F}}_i = \underline{F}_i - \sigma\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,\underline{\underline{H}}_{ij}\right)\underline{x}_i$$

(geänderte lokale Dynamik)