6.2. Bewegung mit Reibungskraft

freie Bewegung + Reibungskraft, 1dimensional

AB: $v_0 = v(t=0)$, $x_0 = 0$

a) Stokesreibung

$$\ddot{x} = -\gamma_s \dot{x} \quad , \quad v = \dot{x}$$

$$\dot{v} = -\gamma_s v$$

$$v = v_0 e^{-\gamma_s t}$$

$$\dot{x} = v = v_0 e^{-\gamma_s t}$$

$$x - x_0 = v_0 \int_0^t dt' e^{-\gamma_s t'}$$

$$x = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_0} - \frac{v_0}{\gamma_s} e^{-\gamma_s t'} \Big|_0^t$$

$$\boxed{x = v_0 \left(1 - e^{-t\gamma_S}\right)}$$ Stokesreibung

b) Newtonreibung

$$\dot{v} = -\gamma_N v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma_N v^2 \longrightarrow \frac{dv}{v^2} = -\gamma_N \, dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'^2} = -\gamma_N \int_0^t dt' \longrightarrow -v'^{-1} \Big|_{v_0}^{v} = -\gamma_N t$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \gamma_N t$$

$$\boxed{v = \frac{v_0}{\gamma_N t v_0 + 1}}$$ Newtonreibung

$$\dot{x} = v$$

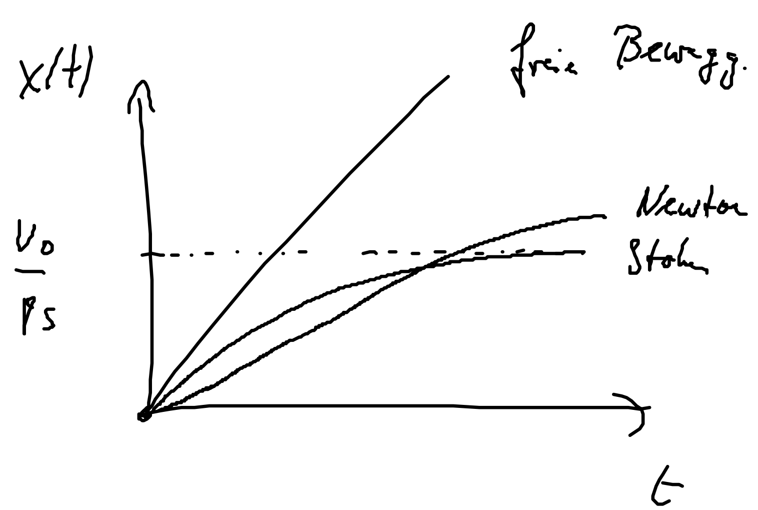
$$x = \int_0^t dt' \frac{v_0}{\gamma_N t' v_0 + 1} = \frac{1}{\gamma_N} \ln\left(\gamma_N v_0 t + 1\right)$$

(a + b)

Vergleich d. Ort-Zeit Gesetze:

$x_{Stokes}(\infty) \to \frac{v_0}{\gamma_S}$ $\qquad$ $x_{Newton}(\infty) \to \infty$

$v_{Stokes}(\infty) \to 0$ $\qquad$ $v_{Newton}(\infty) \to 0$



Newtonreibung führt nicht zu kompletter Abbremsung, aber: Achtung, bei Klein geschwindigkeiten wird Näherung f. Newtonreibung verletzt.

7. Oszillator mit Reibungskraft

langsam geschwindigkeit, Stokesreibung

$$\underbrace{\ddot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{ungestörter Oszillator}} = \underbrace{-\gamma \dot{x}}_{\text{Stokesreibungskraft}}$$

linear Dgl., 2. Ordnung, Konstante Koeffiziente

$\rightarrow e^{\lambda t}$ Ansatz

7.1. Lösungen des Oszillators unter Reibungskraft

mittels Ansatz: $\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$

Bestimmungsgleichung f. λ

Güte $Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$ hohe Güte entspricht viele Schwingung pro Energieverlust / Zeit.

$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Downarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \left(\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \left(1 - 4Q^2\right)^{1/2}\right)}$$

welche Lösungstypen sind mathematisch mögl.?

hängt v. Q ab

a) im allgemeinen ist $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$,

(α_1, α_2 ist durch Anfangsbedingg. zu finden)

wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(i) $Q < \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ reell

(ii) $Q > \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ komplexe

b) pathologisch Grenzfall $Q = \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} \equiv \lambda$

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}$$

Anfangsbedingungen zur Bestimmung v. $\alpha_1\ \alpha_2$

a) $$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x_0 = x(t=0) = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$v_0 = v(t=0) = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ v_0 &= \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \end{aligned}\right\}$$ lineares Gleichungssystem zur Bestimmung v. α_i

$$\begin{pmatrix} x \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

kann nach Cramerscher Regel gelöst werden

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{x_0\lambda_2 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{1 + \frac{2v_0 Q}{\omega_0 x_0}}{(1-4Q^2)^{1/2}}\right)}$$

λ_1, λ_2 einsetzen

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{1 + \frac{2v_0 Q}{\omega_0 x_0}}{(1-4Q^2)^{1/2}}\right)}$$

b) $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}$

$$x_0 = \alpha_1$$

$$v_0 = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = x_0 \lambda + \alpha_2$$

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} = -\omega_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= x_0 \\ \alpha_2 &= \left(v_0 + \frac{x_0 \gamma}{2}\right) \end{aligned}}$$

7.2. physikalische Klassifizierg. d. Lösg.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm (1-4Q^2)^{1/2}\right) \qquad Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

(a,i) <u>Starke Reibung $Q \to 0$</u> : $Q < \frac{1}{2}$ diskutieren

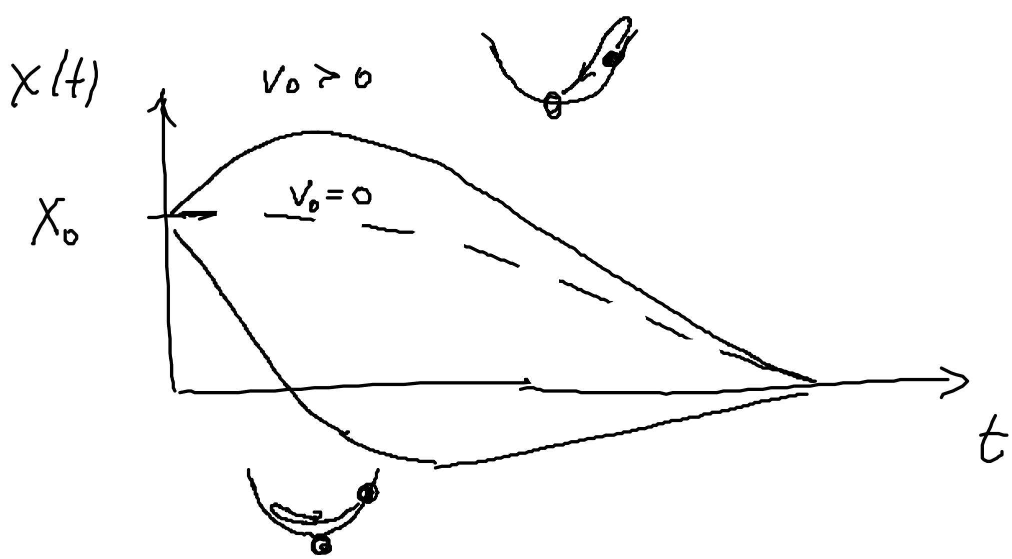
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\alpha_1(x_0,v_0)\, e^{+\frac{\gamma}{2}t(1-4Q^2)^{1/2}} + \alpha_2\, e^{-\frac{\gamma}{2}t(1-4Q^2)^{1/2}}\right)$$

$x(t \to \infty) = 0 \mathrel{\hat{=}}$ Langzeitverhalten

Kurzzeitverhalten: Entwicklung nach kleinen t

Taylorreihe bis erster Ordnung in t

$x(t) = x_0 + v_0 t$ 1. Ordnung in t



gewisse Vielfalt v. Lösungen

(a, ii) Schwache Reibung $Q \to$ „∞", $Q > \frac{1}{2}$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)$$

$$x(t) = x_0\, e^{-\frac{\mu t}{2}} \left(\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \frac{1 + \frac{2v_0 Q}{\omega_0 v_0}}{2Q\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}} \sin(\tilde{\omega}_0 t) \right)$$

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$$

- der Oszillator schwingt mit einer veränderten Frequenz wenn Reibungskräfte vorliegen
- es treten gedämpfte Oszillation auf
- im allgemeinen $x(t) = A\, e^{-\frac{\mu}{2} t} \sin(\tilde{\omega}_0 t + \varphi)$

b) kritische Dämpfung (aperiodische Grenzfall)

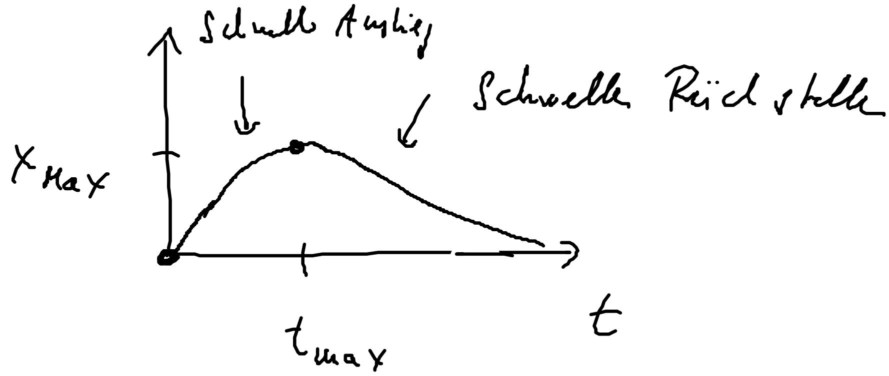
$$x(t) = \left[x_0 + t\left(v_0 + x_0 \frac{\mu}{2}\right) \right] e^{-\frac{\mu}{2} t}$$

i.a. Schnellstmögl. Dämpfung einer Auslenkung $x(t)$

Meßgerät: $x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ für Anfangsgeschwindigkeit

→ Auslenkung zeigen

→ $x(t) = \underline{\underline{t}}\, v_0\, e^{-\frac{\gamma}{2} t}$



$t_{max} = \omega_0^{-1}$ ist Einstellzeit

$x_{max} \propto v_0$

8. Erzwungene Schwingungen

Schwingung i.a. mit Reibung und externer Kraft

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)/m = \tilde{f}(t)$$

inhomog. lineare Dgl. 2. Ordnung.

$$x(t) = \underbrace{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)}_{\text{Lsg. der homogen Gleichung}} + \underbrace{x_{inh}(t)}_{\text{Lsg. der inhomogen Gl. (eine spezielle)}}$$

$$x_{1,2} \sim e^{\lambda_{1,2} t}$$

8.1. Ohne Reibung

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \cos \omega_0 t \\ x_2(t) &= \sin \omega_0 t \end{aligned}\right\} \text{ homog. Lsg. bekannt}$$

Methode der Variation der Konstanten

$$x_{inh} = \alpha_1(t)\, x_1(t) + \alpha_2(t)\, x_2(t)$$

hängen v. Zeit ab!

verwende als Ansatz in der inhomog. Dgl.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 x_2 &= 0 \\ \dot{\alpha}_1 \dot{x}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{x}_2 &= \hat{f} \end{aligned}\right\} \text{ Dgl.-System f. } \alpha_i(t)$$

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{0 - x_2 \tilde{f}}{x_1 \cdot \dot{x}_2 - x_2 \cdot \dot{x}_1}$$

Cramersche Regel

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{x_1 \tilde{f} - 0}{x_1 \cdot \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}$$

Nenner: $x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = \omega_0 \left(\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t \right) = \omega_0$

$$\dot{\alpha}_1 = - \frac{\sin(\omega_0 t) \tilde{f}(t)}{\omega_0}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\cos(\omega_0 t) \tilde{f}(t)}{\omega_0}$$

wird durch Zeitintegral gelöst

$\tilde{f}(t)$ äußere Kraft muß angegeben werden