

Nachtrag zum 3. Keplergesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2\pi}{L_z}\right)^2 a^2 b^2 T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2\pi}{L_z}\right)^2 T^2 b^2}{a} \quad \left. \vphantom{\frac{T^2}{a^3}} \right\} \text{stand an Tafel}$$

$$\text{wird } k = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

aus der Ableitung der Ellipsengleichung

$$\text{und } k = \frac{L_z^3}{G m^2 M} \quad \text{aus Ableitg. } r = r(\varphi) \text{ folgt:}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konstant weil in } k \text{ nur noch Konstanten vorkommen}$$

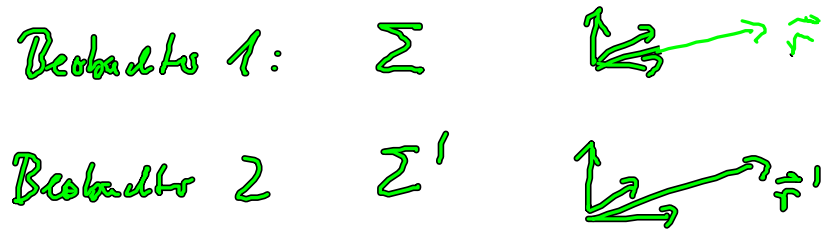
→ für Planeten 1 und 2 gilt:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad (\text{3. Kepler})$$

IV Inertialsysteme, beschleunigte Bezugssysteme

Inertialsystem: Koordinatensystem in dem die
Newtonaxiome gelten, insbesondere gilt die
Newtongleichung (muß getestet werden)

Koordinatentransformation: setzt 2 Beobachter voraus,
jeder der Beobachter hat ein eigenes Koordinatensystem



Die Umrechnung zwischen beiden Systemen ist eine Koordinatentransformation

Bemerkungen:

- a) nicht alle KS sind Inertialsysteme
in beschleunigten Bezugssystemen \neq Schwerkraft
- b) es existiert ein Inertialsystem: Fixstern himmel
- c) aus ein Inertialsystem entstehen weitere, wenn sich
die Newtongleichung beim Übergang von $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

nicht verändert

Inertialsystem Σ

Transformations \rightarrow

Σ'

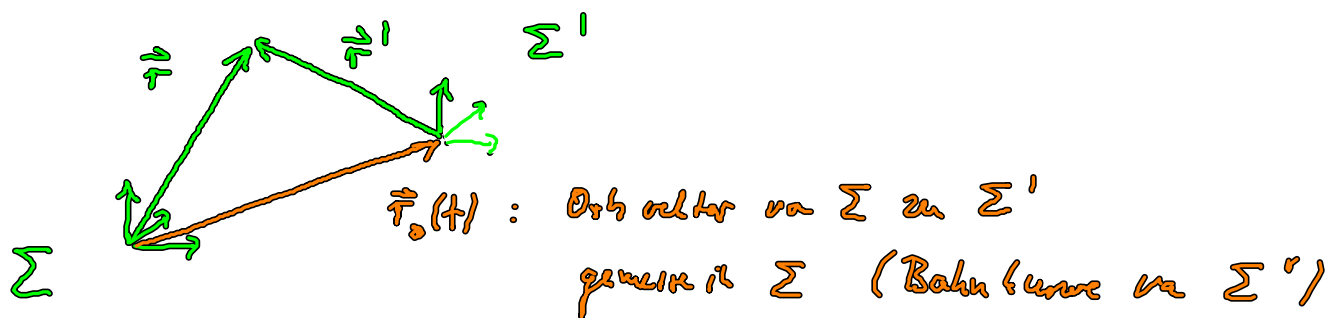
$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{f}'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t)$$

↗
wenn gültig,
so auch Inertialsystem

Speedwerte : Die Newtongleichung bleibt invariant
(ändert Form nicht) unter Koordinatentransformation

1.) Translation von Koordinatensystemen

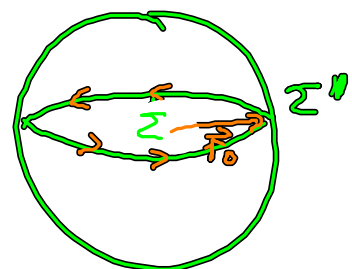


Drehung der Achsen zueinander verboten

Bsp. Erde

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$$

Trafs : $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$, $t \rightarrow t'$



Besonderheit: Invarianz d. Grundgesetze, wenn

$$\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t \quad (\text{gleichförmig geradlinig})$$

ist zu zeigen:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad \text{gilt in } \Sigma \text{ als Inertialsystem}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}' \quad \text{um umzurechnen nach } \Sigma'$$

$$\uparrow \\ = 0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' \quad \text{Beschleunigungen sind identisch}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}}'$$

$$\underbrace{\vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)} = m \ddot{\vec{r}}'$$

hier wird die Kraft transformiert

$$\begin{aligned} \text{Gravitation hängt von Abstände ab: } \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= v_0 t + \vec{r}_1' - v_0 t - \vec{r}_2' \\ &= \vec{r}_1' - \vec{r}_2' \end{aligned}$$

$$\vec{f}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) = m \ddot{\vec{r}}'$$

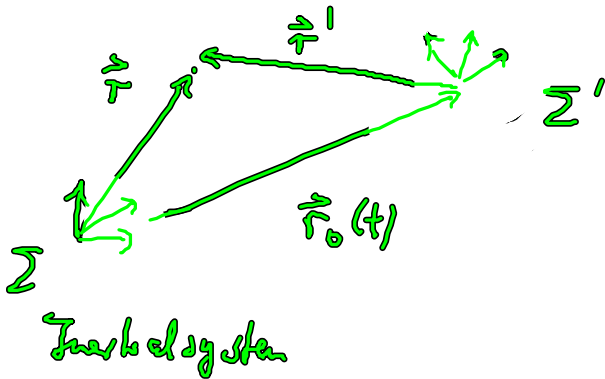
Es gilt in Σ' das Newtongesetz.

für sich $\vec{v}_0 \neq 0$ kann man ein weiteres Inertialsystem finden.

Galileisches Relativitätsprinzip

Es gibt es viele Inertialsysteme die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander fortbewegen.

2.) Beliebige beschleunigte Koordinatensysteme



$\vec{v}_0(t)$ beliebig in t
+ Rotation d. Systems Σ' ungl.

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0(t) + \vec{r}'(t)$$

Idee: Korrekturen zum Newtongesetz berechnen
bis zur 2. Zeitableitung verarbeiten

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}_0(t) + \dot{\vec{r}}'(t), \quad \text{wobei: } \vec{r}'(t) = \sum_i x_i'(t) \vec{e}_i'(t)$$

$$= \dot{\vec{r}}_0(t) + \sum_i \left(\dot{x}_i' \vec{e}_i' + x_i' \dot{\vec{e}}_i' \right)$$

Translationsgeschwindigkeit
Ursprung v. Σ'

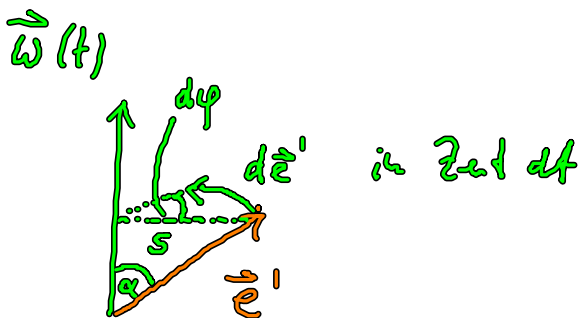
Geschwindigkeit
des Beobachters
in Σ' feststeht

verursacht
Schiebnutte
(Drehung)

↗
durch Drehung
sind Einheits-
vektoren zeit-
abhängig

$$\dot{\vec{e}}_i = ?$$

Ein fiktiv der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$
die die Drehg. v. Σ' beschreibt.



$\vec{\omega}(t)$: Drehachse, Umlauf in Bogenmaß
Zeit

$$d\vec{e}' = s \, d\varphi \, \vec{f}_0, \quad \vec{f}_0 \text{ Einheitsvektor in Richtg. } \perp \vec{\omega}, \vec{e}'$$

Behag d. Bogen-
strecke der durch $d\varphi$ wird

$$d\vec{e}' = \underbrace{|\vec{e}'| \sin \alpha}_{s} \, d\varphi \, \vec{f}_0$$

$$\frac{d\vec{e}'}{dt} = \sin \alpha \frac{d\varphi}{dt} \vec{f}_0$$

α ist \neq Winkel zwischen \vec{e}' und $\vec{\omega}$
 \vec{f}_0 Vektor der steht \perp auf \vec{e}' , $\vec{\omega}$
 Betrag $v. |\vec{\omega}|$

Def. d. Kreuzprodukts

$$\frac{d\vec{e}'}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}'$$

$$\rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' + \underline{\underline{\vec{\omega} \times \vec{r}'}}$$

nur für Beobachter
 im Σ' -System

$$\sum_i \dot{x}_i' \vec{e}_i'$$

bei Umrechnung v. Zeit ableitungen:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} + \vec{\omega} \times$$

↑
in Σ

↑
in Σ'

Kinetik gerads. f. beschleunigtes Bezugssystem

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}' \quad \text{geht über in:}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}' + \underbrace{\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}$$

↑
in Σ beschreiben

eingepriete Kraft

$$\underbrace{\vec{f}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t)}_m + \text{Umstellung nach } \ddot{\vec{r}}'$$

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{f}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) - m \ddot{\vec{r}}_0 - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

"korrigiert Newtongleichg. in Σ' " f. den hier Beobachter

↓
Beschleunigung
in Σ'

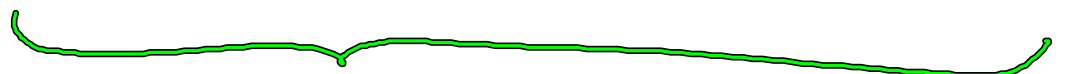
↓
Kraft die
auf MP
 $\vec{r}'(t)$

↓
Kraft die
durch
Beweg.
d. Ursprungs

↓
Corioliskraft
 $\neq 0$
für $\dot{\vec{r}}' \neq 0$

↓
Wirbel-
beschleunigungskraft

↓
Zentrifugalkraft



Schiebkraft, bzw Trägheitskraft

Sind von beschleunigte Bezug d. k S vorzeichen (Schieber)

Sorgt dafür, daß in I-System die Trägheits-generiert

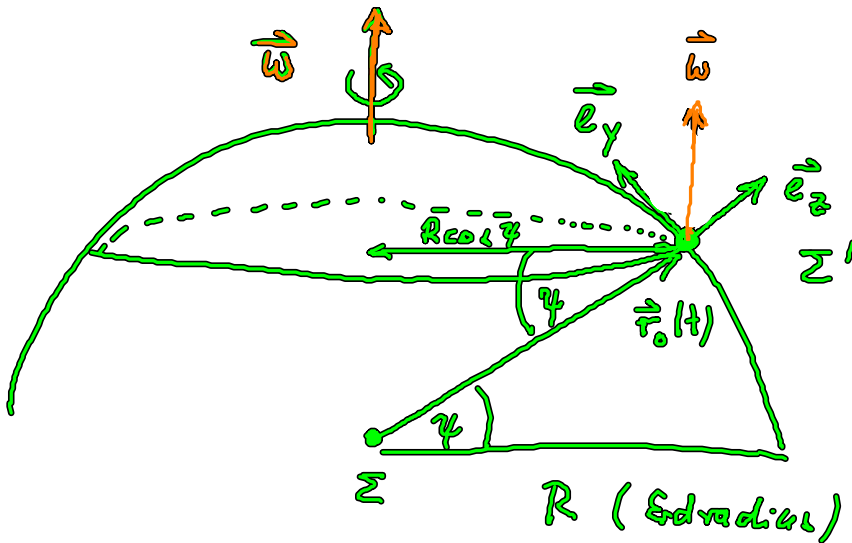
3. Bewegung auf rotierende Erde

3.1. Schiebkraft

$\omega = \text{Erddrehkonstant} = \frac{2\pi}{\text{Tag}} \approx 7 \cdot 10^{-5} / \text{s}$

$\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$

in Tafel oben: \vec{e}_x



Wir wählen die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\omega} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} = -g \vec{e}_2 - \ddot{\vec{r}}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2 \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

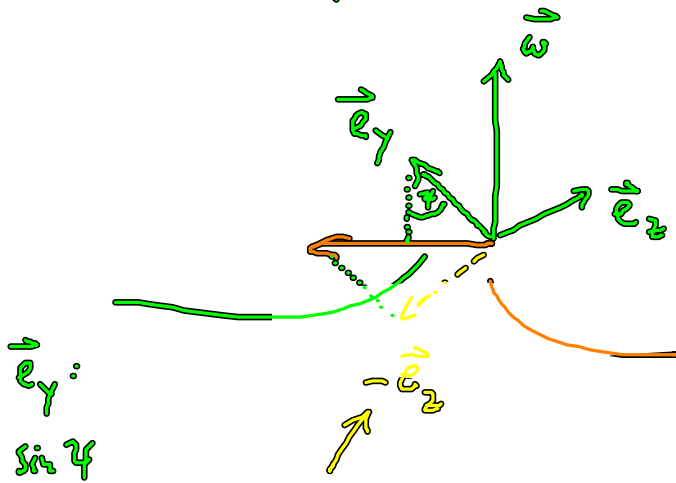
\uparrow geradl. Bahnkurve in Σ' der Erde
 \uparrow Gravitation in Erdweite
 \uparrow Urspr. v. Σ' auf Kreisbahn
 \uparrow Zentrifugalkraft
 Corioliskraft

a/ Betrag mit $\ddot{\vec{r}}_0$.

$$|\ddot{\vec{r}}_0| = \text{Krümmung} = \omega^2 R \cos \varphi$$

Richtung festlegen

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \omega^2 R \cos \varphi (0, \sin \varphi, -\cos \varphi)$$



Kraft auf und durch
wirke, ist durch
Eulerwinkel und
Betrag