4. Einsteins Äquivalenzprinzip, metrischer Tensor

Vorbetrachtung: Newtongleichung für Teilchen $\vec{r}(t)$ im Gravitationsfeld eines anderen Massepunkts $(\vec{R}, M)$

$$\cancel{m}_t \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{\nabla} \frac{G \cancel{m}_s M}{|\vec{r}(t) - \vec{R}(t)|}$$

in allen Experimenten bisher: Gleichheit von träger und schwerer Masse ($m_t = m_s$), wird auch später f. relativistischen Gleichungen verwendet

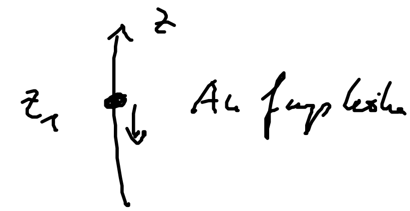
Einsteins Kritik: a) wenn sich $\vec{R}(t)$ zeitlich ändert, so „sieht" $\vec{r}(t)$ diese Potentialänderung unendlich schnell (Widerspruch zur speziellen RT, Lorentztrafo, etc.)

b) die Newtongleichung ist nicht Lorentz- sondern Galileiinvariant $\rightarrow$ nicht vereinbar mit Maxwellgleichungen f. elektromagnet. Feld mögl. Verbesserung: $$\frac{d^2 x^\alpha(\tau)}{d\tau^2} = g^\alpha(x^\beta) \qquad (m_s = m_t)$$

Lorentzinvarianz muß gewährleistet sein (τ nicht t)

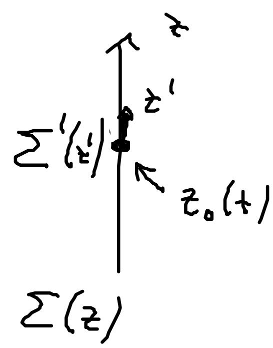
Gravitationskraft unklar in 4er Schreibweise

Idee: freier Fall in Erdnähe:



$$\ddot z = -g \,, \quad z = z_1 - \frac{g}{2} t^2$$

Wegtransformieren der Gravitation:

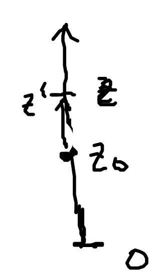


Σ' ist fest verbunden mit Massepunkt

$$z(t) = z_0(t) + z'(t)$$

$$\ddot z = \ddot z_0 + \ddot z'$$

$$\cancel{-g} = \cancel{-g} + \ddot z'$$



$$\rightarrow \ddot z' = 0$$

Im fallenden System Σ' spürt der Beobachter die Gravitation nicht.

Σ' ist beschleunigt und die Scheinkraft aufgrund der Beschleunigung hebt sich mit der Gravitation weg.

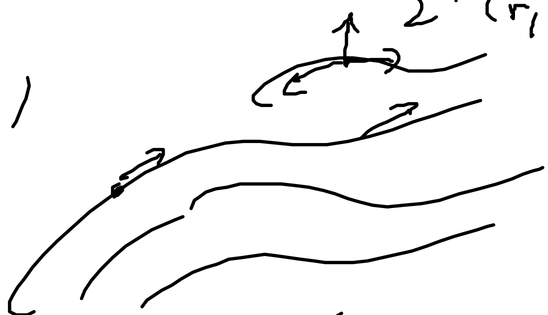
Einsteins Äquivalenzprinzip

In jedem Raum-Zeit Punkt läßt sich ein lokales Koordinatensystem Σ' finden (frei fallend), so daß in diesem KS die Naturgesetze gelten, die in nichtbeschleunigten Systemen gelten, mit Ausnahme der Gravitation. Insbesondere gilt SRT in Σ'.

$\Sigma'(\vec{r}', t') \rightarrow \xi^\alpha = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$

$\xi_\alpha = (\xi^0, -\xi^1, -\xi^2, -\xi^3)$

Feld $\vec{g}(\vec{r}, t)$



$\Sigma(\vec{r}, t)$

$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$x_\alpha = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

im System Σ' gilt die SRT:

$$ds^2 = \underset{\text{verschieden KS}}{\text{Konstant in}} = \sum_\alpha d\xi_\alpha d\xi^\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

$$= d\xi^{0\,2} - d\xi^{1\,2} - d\xi^{2\,2} - d\xi^{3\,2}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ 0 & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\equiv \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$
oftmals

Summe weglassen, wenn
1 Index oben,
1 Index unten.

am Ende $\to$ x^α - Dquant. in Σ,

so: $t \leftrightarrow t'$ muß es umgl. sein $\xi^\alpha \leftrightarrow x^\alpha$

$$d\xi^\alpha = d\xi^\alpha(x^\mu) = \sum_\mu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$ Kettenregel

$$ds^2 = \underline{\eta_{\alpha\beta}} \sum_{\mu,\nu} \underline{\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}}\, dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

g metrischer Tensor: wird sich als Verallgemeinerung des Gravitationspotentials der Newtonphysik herausstellen:

$$g_{00} \sim f\left(\varphi(\vec{r})\right)$$

Newton Grenzfall

Newton-gravitations-potential

5. Teilchen im Gravitationsfeld

Keine anderen Kräfte

wissen: Σ' gilt SRT $\longrightarrow$ $\dfrac{d^2}{d\tau^2}\xi^\alpha(\tau) = 0$

wir brauchen aber: x^α in Σ

wie kommt man von der SRT Gleichg. in Σ' zu Gl. f. x^α in Σ

5.1. Relativistische Formulierg. der Teilchenbahn

$$\frac{d^2}{d\tau}\xi^\alpha\left(x^\beta(\tau)\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\sum_\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) = 0$$

$$\sum_\beta\left(\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}\right) = 0$$

Gleichg. mit $\sum_\alpha \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}$ multipliziert

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau}+\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}\right)=0$$

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\sum_\mu\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\beta}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)+\sum_\beta\underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\beta}}_{\delta_{\gamma\beta}}\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}=0$$

$$\sum_{\beta,\mu}\underbrace{\left(\sum_\alpha\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\beta}\right)}_{\Gamma^\gamma_{\beta\mu}}\cdot\underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}}\quad\underbrace{\delta_{\gamma\beta}}_{\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2}}=0$$

Teilchenbahn in Σ

Gleichung f. Teilchenbahn in Σ!

$$\boxed{\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2}=-\Gamma^\gamma_{\beta\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\qquad *}$$

<u>Bemerkungen</u>

a) Γ sind Christoffelsymbole, über β,μ wird summiert

b) wenn Γ bekannt, so ist $*$ eine Glg. f. Bahnkurve in Σ, $x^\alpha(\tau)$ berechenbar

c) es gilt ein Zusammenhang zwisch. Γ und g

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)$$

! ohne Vorrechnen !

Γ : kann Gravitationskraft interpretiert werden

g : als Gravitationspotential

$g^{\sigma\nu}$: inverse Tensor / Matrix

$$g^{\sigma\nu} \cdot g_{\nu\mu} = \delta^{\sigma}_{\mu}$$

d) <u>Einsteinsch Feldgleichungen</u> legen Zusammenhang zwisch. g und der Materieverteilung fest.

$$g = g(\text{Materie})$$

5.2. Grenzfall Newtonmechanik

legt uns g^{00} fest im Limes $v \ll c$

$$u^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\alpha(\tau) = (\gamma c, \gamma v_1, \gamma v_2, \gamma v_3)$$

letzte VL $\quad \gamma(t),\ v(t) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \underset{v \ll c}{\approx} 1$

$$u^\alpha(\tau) \underset{v \ll c}{=} (c, 0, 0, 0)$$

Bewegungsgleichung im Newtongrenzfall:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

volle Schönheit!

$u^\alpha = (c, 0, 0, 0)$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau}$$

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{g^{\alpha\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right)$$

CF Formel

Weiter: Newtonpotential ist quasi-statisch

lasse alle Ableitungen nach t weg, d.h. $\partial / \partial x^0 \to 0$.

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{g^{\alpha\nu}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}}$$

$g^{\alpha\nu}$ ist metrischer Tensor, soll genähert werden:

$$g^{\alpha\nu} = \eta^{\alpha\nu} + \varepsilon^{\alpha\nu}$$

ohne Gravitation

kleine Änderung durch Gravitation

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{\eta^{\alpha\nu}}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \varepsilon^{00} \quad \text{in 1. Ordnung } \varepsilon$$

$\alpha = 1-3 \equiv i$ eingesetzt Γ

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = +\Gamma^{i}_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} \overbrace{\eta^{ij}}^{= -\delta_{ij}} \frac{\partial}{\partial x^j} \varepsilon^{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$$

es gilt ein
absolute Zeit
$\tau = t' = t$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\varepsilon^{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$$

was ist das? $u^{\alpha=0}$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\underline{\underline{\varepsilon^{00}}}\,c^2 \quad \text{(oben, siehe } u^{\alpha\,\text{"}0\text{"}}\text{)}$$

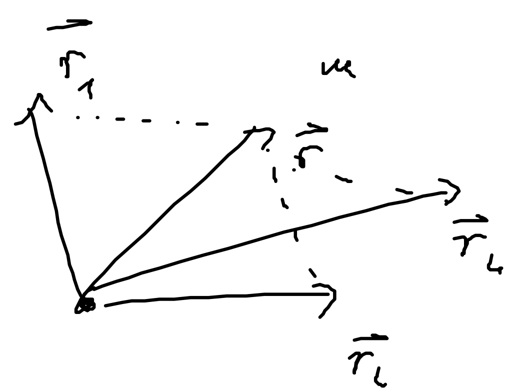
$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \overset{!}{=} -\frac{\partial}{\partial x^i}\underline{\underline{\frac{\varphi(\vec{r})}{m}}} \quad \text{nach Newton}$$

Damit ergibt sich als einfachster Fall $v \ll c$

$$\varepsilon^{00} = \frac{2}{c^2}\frac{\varphi(\vec{r})}{m}, \quad g^{00} = 1 + \frac{2}{c^2}\frac{\varphi(\vec{r})}{m}$$

damit ist metrischer Tensor f. Newton Grenzfall festgelegt.

Wie sieht $\varphi(\vec{r})$ aus?



$$\varphi(\vec{r}) = -\sum_n \frac{G\,m\,m_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|}$$

weil sich in Newton gl. m raus kürzt

Schreibt man auch $\frac{\varphi}{m} \to \varphi$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi(\vec{r})}{c^2}$$

mit den gegeben g_{00}

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

Abstände des SRT sind modifiziert

durch die Gravitation