## 6. Einfache Folgerungen aus dem Äquivalenzprinzip

beschränken uns auf Newtongrenzfall

### 6.1. Ruhende Uhren im Gravitationsfeld

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = g_{00}\, dx^0 dx^0$$

Tick einer Uhr, direkt am physikalisch Vorgang befestigt ($\Sigma'$)

enthält Einfluß des Gravitationsfelds

für eine ruhend Uhr in $\Sigma$ ($dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$) Ortskoordinaten ändern sich nicht.

Idee: Vergleich der Uhren mit und ohne Gravitationsfeld

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, dx^0 = \sqrt{g_{00}}\, dt \qquad (x^0 = ct)$$

$d\tau$ gilt mit (m) und ohne Gravitationsfeld (o) ergleich

ohne Gravitation: $g_{00} = \eta_{00} = 1 \longrightarrow d\tau = dt_0$

mit Gravitation: $\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 + 2\frac{\varphi(\vec r)}{c^2}} \approx 1 + \frac{\varphi(\vec r)}{c^2}$

1. Ordg. Taylor

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt_m$$

$$\rightarrow \quad \frac{dt_0}{dt_m} = 1 + \frac{\varphi(\vec{r})}{c^2} < 1 \quad (\varphi < 0)$$

$dt_0 < dt_m$ : Uhren im Gravitationsfeld gehen langsamer

Vorstellg: ein und derselbe physikalische Vorgang
dauert mit / ohne Gravitation
unterschiedlich lang

## 6.2. Photon im Gravitationsfeld

Sehr besondere Uhr wählen: Atom das Licht aussendet

entsprechend Frequenz: $\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{1}{dt}$ bestimmt Zeiteinheit

z.B. Schwingungsdauer

ohne Gravitation: $\omega_0 \sim \frac{1}{dt_0}$ mit Gravitation $\omega_m \sim \frac{1}{dt_m}$

$$\rightarrow \quad \frac{\omega_m}{\omega_0} = \frac{dt_0}{dt_m} = \sqrt{g_{00}} \approx 1 + \frac{\varphi(\vec{r})}{c^2}$$


$$\frac{\omega_m(\vec{r}_1)}{\omega_m(\vec{r}_2)} = \frac{1 + \varphi(\vec{r}_1)/c^2}{1 + \varphi(\vec{r}_2)/c^2} \approx 1 + \frac{\overbrace{\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)}^{\Delta\varphi}}{c^2}$$

↗ Taylor 1. Ordnung.

relative Änderung:
$$\frac{\omega(\vec{r}_S) - \omega(\vec{r}_E)}{\omega(\vec{r}_E)} \approx \frac{\Delta\varphi}{c^2} \approx \frac{\varphi(\vec{r}_S)}{c^2} < 0$$

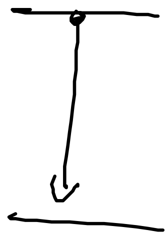
Die relative Frequenzänderung im Gravitationspotential bei Lichtentstehung ist $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 0$ → <u>Rotverschiebung</u>

Größenordnung: $10^{-6}$, ist gemessen mit Tellbalke

Die Rotverschiebung kann durch Arbeit gegen Gravitationsfeld erklärt werden.

<u>ODER</u> Pound Rebka-Versuch 1960,

20 m



„Photonfallen"

Vermessen der Frequenz an 2 Stellen im Erdfeld

konnte eine Blauverschiebung detektiert werden

(Energiegewinn im Feld)

## 6.3. Lichtgeschwindigkeit in Gravitationsfeldern

Veränderung der Lichtgeschwindigkeit d. Gravitation:

SRT : $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$

ART : $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$

Newtongrenzfall $\approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$

Licht : $ds^2 = 0$

SRT : $c = \frac{|d\vec{r}|}{dt}\Big|_{SRT}$ ← Lichtgeschwindigkeit, weil Lichtfront beschrieben

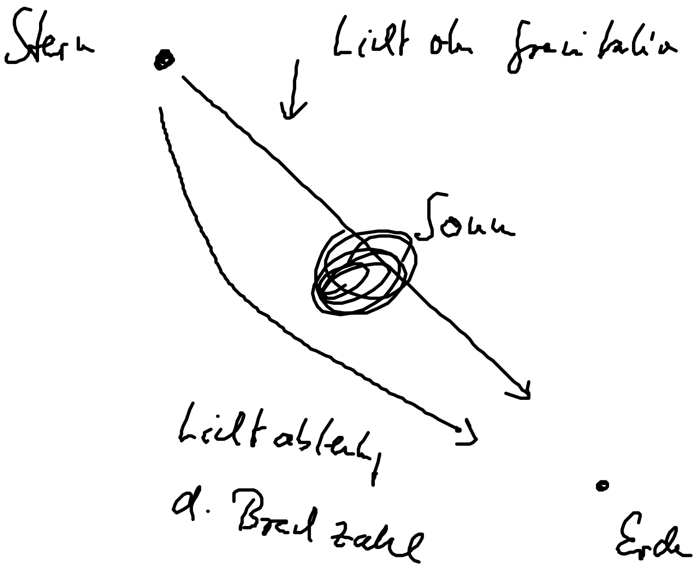
ART $\quad c = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\text{ART mit } \varphi \neq 0}$

$$\rightarrow \quad \frac{\overbrace{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_m}^{= c_m}}{\underbrace{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_0}_{= c_0}} = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

$$c_m = c_0 \left(1 + \underbrace{\frac{\varphi}{c^2}}_{< 0}\right)$$

$$\boxed{c_m < c_0}$$

Die Gravitation wirkt wie Brechzahl




1919 Eddington

dadurch Einstein weltberühmt

Modern Anwendung: Metamaterialien-Design von Brechzahl < 0

$n(\vec r)$ designen

(Tarnumhänge)

## 7. Einstein-Feldgleichungen

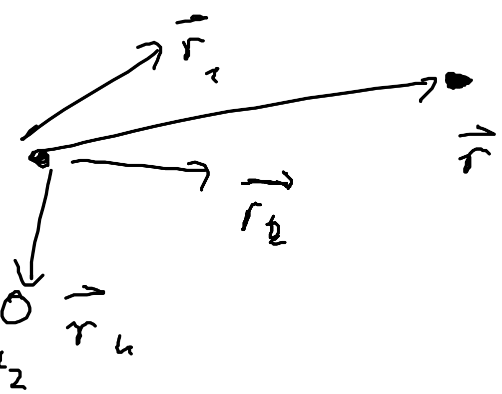
bisher $g_{\alpha\beta}$ unbekannt, nur f. schwache Felder: $g_{00} = g_{00}(\varphi)$

Newtonpotential

Einstein Leistung: Bestimmung einer Gleichung mit der man $g_{\alpha\beta}$ aus Massenverteilung berechnen kann

### 7.1. Newtongrenzfall der Einsteingleichungen

jedes Gravitationsfeld nach Newton: $\varphi(\vec r) = \sum_n \frac{-G m_n}{|\vec r - \vec r_n|}$




Summe über alle Mp um Feld bei $\vec r$ zu ermitteln

es kann gezeigt werden: $\Delta \varphi = 4\pi G \rho_M(\vec r)$

Massedichte: $\rho_M = \sum_n m_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$

Newtonsche Gravitationsgleichung f. $\varphi$

Gleichung wird bewiesen über 2 Schritte:

Zeige, daß $\Delta f = 0 \quad (\vec{r} \neq 0)$

$$\int d^3r \, \Delta f = -4\pi$$

für $f = \frac{1}{|\vec{r}|}$ ist

Jedes Gravitationspotential kann über Massedichte berechnet werden.

1. Idee: $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \longrightarrow \varphi = \frac{c^2 g_{00} - c^2}{2}$

einsetzen in $\Delta\varphi = G 4\pi \rho_M$

$$\boxed{\Delta g_{00} = \frac{G 8\pi \rho_M}{c^2}}$$

bestimmt $g_{00}$ f. beliebige Massepunktverteilungen

Wie wird diese Gleichung verallgemeinert auf $g_{\alpha\beta}$?

## 7.2. Einsteinsche Verallgemeinerung

$$\varphi \sim g_{00} \rightarrow g_{\mu\nu}$$ metrischer Tensor

$$\rho_M \rightarrow T_{\mu\nu}$$ Energie-Impulstensor $T(\rho_M, u^\alpha)$

Ricci Tensor (hängt von $g_{\alpha\beta}$ ab)

Krümmungsskalar ($g_{\alpha\beta}$)

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$ Einsteinsche Feldgl.

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_M$$ Newtonsche Feldgl.

Einsteingleichg. sind ein System v. Dgl. für $g_{\alpha\beta}$ wenn $T_{\alpha\beta}$ vorgegeben wird.

## 8. Schwarzschildmetrik und relativistisches Gravitationspotential

Gleichungen f. 1 Massepunkt gelöst, analog z. Newton!

1 MP + Probekörper $\hat{=}$ Sonne + Planet und exakt Lösbar

$$ds^2 = g_{00}\, c^2 dt^2 - g_{rr}\, dr^2 - r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)$$

## 8.1. Plausibel machen der Schwarzschildmetrik

ohne Gravitation: Metrik $g_{\alpha\beta}$ in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$$

Kugelkoordinaten:

an VL abgeschrieben

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\vec{e}_r\right) = r\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\,\vec{e}_r$$

$$d\vec{r} = r\, d\vartheta\, \vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi + dr\, \vec{e}_r$$

(„dt" kürzen)

$$d\vec{r}\cdot d\vec{r} = d\vec{r}^{\,2} = r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + dr^2$$

$$ds^2 = \underset{g_{00}}{c^2}\, dt^2 - \underset{g_{rr}}{dr^2} - r^2 d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

Übergang zu Schwarzschildmetrik!

plausibel: rotationssymmetrisch Problem (sollte nur v. r abhängen
nicht v. Winkeln)

$$„g_{\vartheta\varphi} \to 0"$$

$$g_{00} \to \text{Newtongrenzfall}$$

$$g_{rr} \to g_{00}^{-1}(r)$$

## 8.2. Teilchenbahnen f. Schwarzschildmetrik

$g_{\alpha\beta}$ ist bekannt, so:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x^\gamma = -\Gamma^\gamma_{\beta\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right)$$

aus letzter Vl.

damit kann im Prinzip $x^\gamma$ bestimmt werden

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g_{rr}^{-1} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}$$

+ alle weiteren Christoffelsymbole berechnen

danach kann man alle 4 Komponenten $x^\mu$ aufschreiben

mit $A = g_{rr}$, $B = g_{00}$ " ' " Ableitung nach Ort

(1) $$\frac{d^2 t}{d\tau} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{dt} = 0$$

(2) $$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \ldots$$

(3) $$\frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} = \ldots$$

(4) $$\frac{d^2 \varphi}{d\tau} = \ldots$$

analog zu Newton, nur $\tau$, $t$ sind fremdartig,

können in Verbindung gebracht werden über Erhaltungssatz (1)

(1) $$B\,dt = d\tau \; K$$

$\uparrow$ Konstante

(4) $\to$ Drehimpulserhaltung.

Ergebnis   Energiesatz analog zu Newton

„Energie"
Konstant

$$\frac{d}{d\tau} \qquad \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2 r_s}{2mr^3} = \frac{mc^2(k-1)}{2}$$

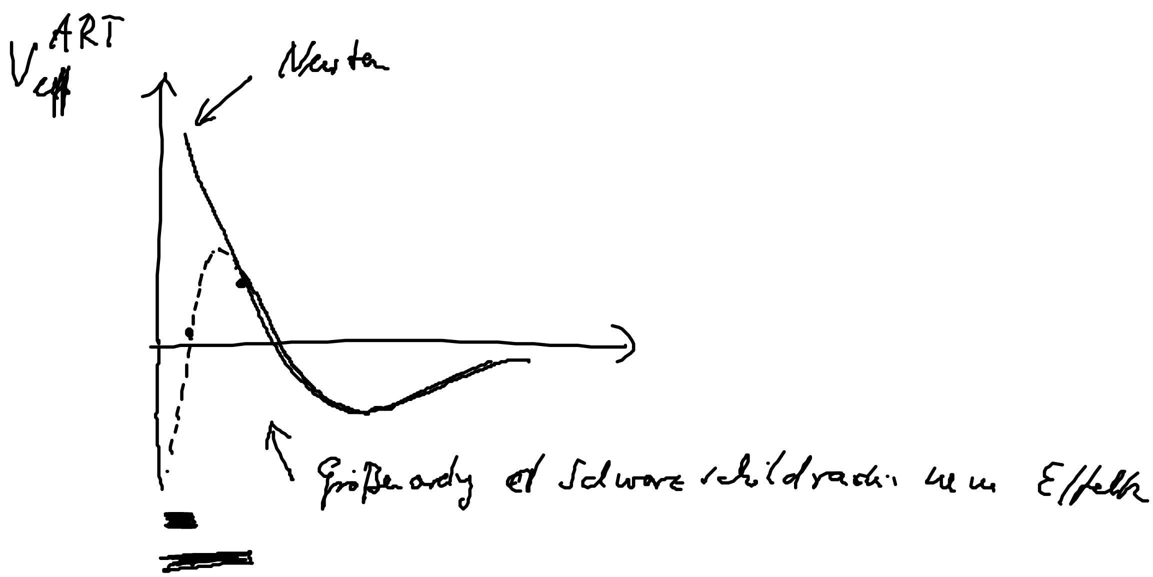
kinetische Energie f. r — Gravitationspotential — Drehimpulspotential — relativistischer Korrekturterm $\frac{1}{r^3}$

$r_s$ Schwarzschildradius $= \frac{2GM}{c^2}$

## Bemerkungen

a) Schwarzschildradius tritt als neuer Parameter auf

Abhängigkeit mit $\frac{1}{r^3}$ f. neuen Potentialterm




b) Einstein: Periheldrehung d. Merkur

c/ wenn Masse auf Skala $< r_S$ geballt ist

so hat man ein schwarzes Loch, Teilchen kann in Trichter fallen

warum schwarzes Loch?

$$\omega_\infty = \sqrt{g_{00}}\;\omega_0 = \sqrt{1-\frac{r_S}{r}}\;\omega_0$$

$r < r_S$, also im schwarzen Loch

→ Frequenz wird imaginär

→ kein Lichtausbreitg.