VI Kanonischer Formalismus

1. Bisher nicht bedacht:

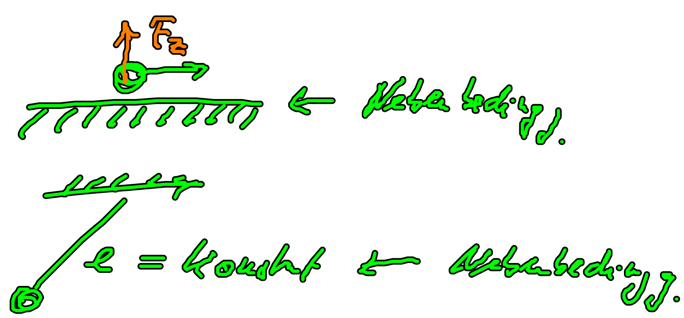
Mit Newton-Theorie steht komplettes Werkzeug zur Verfügung,
aber moderne Theorie unterscheidet sich, kann bequemer gestaltet werden:

a/ Bewegungsgleichungen die in allen Koordinaten gelten,
d.h. kartesisch, Zylinder, Kugel, etc ...
($m\ddot{x}_i = f_i$; $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f_r$ sehen unterschiedlich aus
→ gibt es eine mehr allgemeine Form $\forall$ Koordinaten)

b/ Einbau geometrischer Nebenbedingungen / Zwangskräfte

Beispiele: Bewegg. auf Tisch

Fadenpendel



c/ Möglichkeit der Verallgemeinerg. d. Newton-Mechanik
zur Quantenmechanik (konjugierte Variable)
→ Hamiltonformalismus

d/ Formalismus soll f. Felder aufbereitet werden

2. Prinzip extremaler Wirkung (Hamiltonprinzip) und Euler-Lagrange Technik

2.1. „komplizierte" Ableitung der Newtongleichung

Newton gl. kann aus Hamiltonprinzip (a–d) abgeleitet werden:

Teilchen in Potential $V(\vec{r})$ $\quad m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

<u>Hamiltonprinzip</u>: (Rezept)

a) Man schreibe die Lagrangefunktion auf

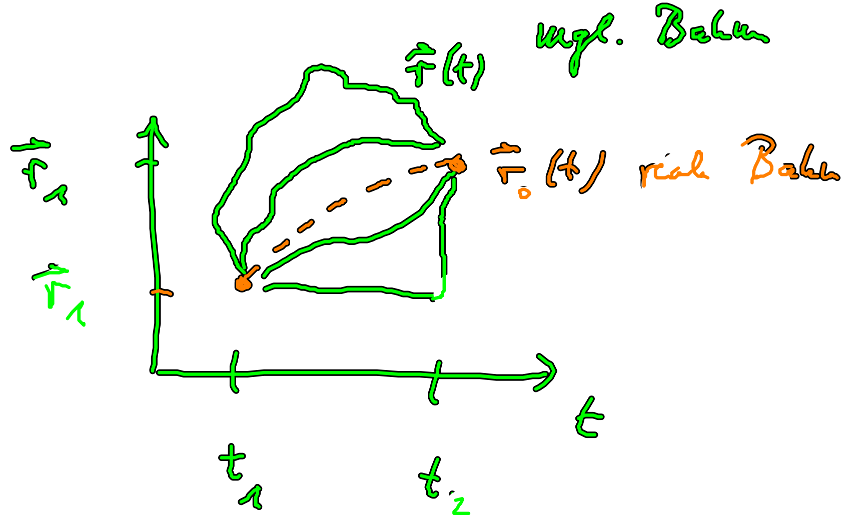
$$L = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kinetische}}}{T} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potentielle Energie}}}{V} = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

später t

b) Man schreibe die Wirkungsfunktion S auf:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \overset{!}{=} \text{extremal}$$

c) Für das $\vec{r}_0(t)$ aus Gruppe mögl. Bahnen zwischen $\vec{r}(t_1)$, $\vec{r}(t_2)$ soll S extremal werden, dann ist $\vec{r}_0(t)$ die reale Bahn, die das Teilchen nimmt



d/ bei $\vec r(t_1)$ und $\vec r(t_2)$

fallen alle Bahnen zusammen

→ <u>Ziel</u>: Ableitung d. Newtonschen Grundgesetzes:

<u>wie geht man mit Extremalbildung um?</u>

<u>Funktion</u>: $f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x)\Big|_{x_0} (x-x_0)}_{=0} + \dots$

wenn die 1. Ableitung $\to 0$

$\underbrace{\text{dann liegt Extremum vor}}_{\delta f \,\hat{=}\, \text{Änderung d. Funktion}}$

„<u>Funktional</u>" $S(\vec r, \dot{\vec r}) = S(\vec r_0) + \delta S$

hängt v. Funktionen ab

$\hat{=}$ Änderung d. Funktionals

$= 0$

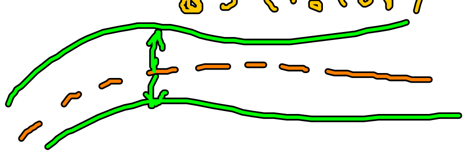
Fortg.

$$\boxed{\text{Hamiltonprinzip} \quad \delta S = 0}$$

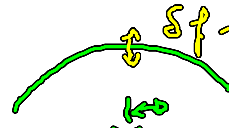
Variation v. S soll verschwinden

um Variation auszurechnen $\quad \vec{r}_0 + \delta\vec{r} \longleftrightarrow x_0 + \Delta x$

$\delta S(\vec{r}_0 + \delta\vec{r})$



$\delta f \to 0$



x_0

(a–1) f. Newtongleichung ausarbeiten:

a) $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r})$

b) $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}(t) - V(\vec{r}(t)) \right)$

c) $\delta S = 0$ anwenden!

mittels $\vec{r} \to \vec{r}_0(t) + \delta\vec{r}(t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}_0^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta\dot{\vec{r}} + \cancel{\delta\dot{\vec{r}}^{\,2}} \right) - V(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}) \right]$$

Klein Änderung $\delta\vec r$ analog dx bei Funktion

$$V(\vec r) = V(\vec r_0) + \underline{\vec\nabla V(\vec r_0)\cdot\delta\vec r}$$

$$S = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{m}{2}\dot{\vec r}_0^{\,2} + V(\vec r_0)\right)}_{S_0 \,\hat{=}\, \text{Wirkg. d. wahren Bahn}} + \int_{t_1}^{t_2} dt\left(m\dot{\vec r}_0\cdot\delta\dot{\vec r} - \vec\nabla V(\vec r_0)\cdot\delta\vec r\right)$$

$$S - S_0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(m\dot{\vec r}_0\cdot\delta\dot{\vec r} - \vec\nabla V(\vec r_0)\cdot\delta\vec r\right)$$

verwenden:
$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt}\left[\dot{\vec r}_0(t)\cdot\delta\vec r(t)\right]}_{\dot{\vec r}_0\cdot\delta r(t)\Big|_{t_1}^{t_2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\dot{\vec r}_0\cdot\delta r(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \dot{\vec r}_0(t_2)\cdot\delta\vec r(t_2) - \dot{\vec r}_0(t_1)\cdot\underbrace{\delta\vec r(t_1)}_{=0 \text{ lt. Vorauss.}}$$

t_2

$$\delta S = \int_{t_1} dt \left(m \dot{\vec{r}}_0 \, \delta \dot{\vec{r}} \; - \underbrace{m \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r} \right)}_{=0} - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \cdot \delta \vec{r} \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \underbrace{\left(- m \ddot{\vec{r}}_0 - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \right)}_{=0} \cdot \delta \vec{r} \;\stackrel{!}{=}\; 0$$

Variation $\neq 0$ außer Rand und kann unabhängig gewählt

$$m \ddot{\vec{r}}_0 = - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0)$$

ist dann aus Hamiltonprinzip abgeleitet, und dies kann zur Grundlage d. Mechanik gemacht werden.

2.2. Euler-Lagrange Gleichungen f. Teilchen

jetzt Wirkung gedanklich in beliebig Koordinaten formulieren

verallgem

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i) - V(q_i, t)$$

$$q_i : \; (x, y, z), \; (r, \varphi, \vartheta), \; (r, \varphi, z)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left(q_i(t), \dot{q}_i(t), t\right) \quad = \quad \Big/ \; q_i(t) \rightarrow \underset{\text{reale Bahn}}{q_i^0} + \underset{\text{Variation}}{\delta q_i(t)}$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \Big(L\left(q_i^0, \dot{q}_i^0, t\right)}_{S_0} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^0}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0}\, \delta \dot{q}_i \right) \Big)$$

$$\underbrace{\delta S}_{S - S_0} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^0}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0}\, \delta \dot{q}_i \quad \underbrace{- \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0}\, \delta q_i \right)}_{0} \right)$$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^0} \right)}_{=0} \delta q_i \overset{!}{=} 0$$

beliebig variieren : linear unabhängig!

Lagrange Gleichungen 2. Art ohne weitere geometrische Nebenbedingg.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

gilt bisher f. Teilchen ohne weitere geometrische Nebenbedingungen.

Bemerkungen

a/ 1. Art kommt auch!

b/ Vertrauen gewinnen:

1d freies Teilchen: $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \, , \, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ($q_i = x$)

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \overset{!}{=} 0$$

$$0 - m\ddot{x} = 0 \quad \checkmark$$

1d. Oszillator $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \, , \, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$-kx - m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{x} = -kx \quad \checkmark$$

c/ man definiert sich $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i$ als den zugehörigen Impuls zur Koordinate q_i

man nennt q_i und p_i zueinander kanonisch

(kanonische Variable)

d) Energie: $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$

vollständiges Differential bilden.

$$\frac{d}{dt} L = \partial_t L + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

Lagrange 2. Art

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial}{\partial t} L + \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad \text{Produktregel}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} L + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} L = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L}_{\text{wird Energie } E \text{ sein:}} \right)$$

müssen zeigen, daß $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i - L$ die Energie ist

benutzen kartesische Koordinaten $x_i = (x, y, z)$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot x_i} L \, \dot x_i - \sum_i \frac{m}{2} \dot x_i^2 + V(x_i, t)$$

mit $L = \sum_j \left(\frac{m}{2} \dot x_j^2 - V(x_j, t) \right)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = \frac{\partial}{\partial \dot x_i} \sum_j \left(\frac{m}{2} \dot x_j^2 - V(x_j, t) \right)$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot x_i} \frac{m}{2} \dot x_j^2 - 0$$

$$= \sum_j \frac{m}{2} \cdot 2 \dot x_j \underbrace{\frac{\partial \dot x_j}{\partial \dot x_i}}_{\delta_{ij}}$$

$$= m \dot x_i$$

oben einsetzen

$$= \sum_i \dot x_i m \dot x_i - \sum_i \left(\frac{m}{2} \dot x_i^2 - V(x_i, t) \right)$$

$$= \sum_i \left(\frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + V(x_i, t) \right)$$

$$--- \quad = T + V$$

$$\boxed{\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = T + V = \text{Energie}}$$

gilt f. beliebige Koordinaten!

$$\boxed{\frac{d}{dt} E = - \frac{\partial L}{\partial t}} \qquad L = L(t) = T - V(\vec{r}, t)$$

Änderung d. Energie $T+V$ wird durch die Zeitabhängig. der Lagrangefkt. bestimmt

wenn V nicht von t abhängt, so ist $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

und die Energie ist erhalten