Zusammenfassg. zu kanonischen Transformationen am Beispiel der Erzeugenden $R_2(q_k, P_k, t)$

- KT: Übergang $\{q_k, p_k, H(q_k, p_k)\} \rightarrow \{Q_k, P_k, H'(Q_k, P_k)\}$

- kanonische Gleichungen gelten unverändert:

$$\dot{p}_k = -\partial_{q_k} H \quad \rightarrow \quad \dot{P}_k = -\partial_{Q_k} H'$$

$$\dot{q}_k = \partial_{p_k} H \quad \rightarrow \quad \dot{Q}_k = \partial_{P_k} H'$$

- konkrete Transformationsformeln:

$$H'(Q_k, P_k) = H(q_k, p_k) + \partial_t R_2(q_k, P_k) \qquad (i)$$

$$p_k = \partial_{q_k} R_2, \quad Q_k = \partial_{P_k} R_2 \qquad (ii)$$

mittels (ii): $q_k = q_k(Q_i, P_k)$, $p_k = p_k(Q_i, P_i)$ wird (i) in Q, P dargestellt

damit ist H' vollständig in den neuen Koordinaten gegeben,
mittels der Hamiltongleichungen f. Q, P ist das Problem vollständig formuliert

<u>Beispiel</u> Dipolnäherung f. geladene Teilchen (Ladung q) im elektromagnetischen Feld

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \qquad \vec{E} = \vec{E}_T + \vec{E}_L$$

$$= -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi$$

1) Dipolnäherung: $\vec{E}(\cancel{\vec{r}},t) = \vec{E}(t) = -\partial \vec{A}(\cancel{\vec{r}},t) - \vec{\nabla}\big(-\vec{r}\cdot\vec{E}_L(\cancel{\vec{r}},t)\big)$

2) man möchte $\vec{E}(t)$ in der H stehen haben

weil das eine meßbare Größe ist: $H(A,\phi) \to H(E)$ $\qquad \vec{E}_T + \vec{E}_L = \vec{E}(t)$

wähle das R_2: $R_2(\vec{r},\vec{P},t) = q\vec{r}\cdot\vec{A}(t) + \vec{P}\cdot\vec{r}$

(i) $$H' = \frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2}{2m} + q\phi + q\vec{r}\cdot\partial_t\vec{A}(t)$$

(ii) $\vec{R} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} R_2 \quad \left(\hat{=}\ Q_k = \partial_{P_k} R_2\right)$

$\vec{R} = \vec{r} \quad \left(\hat{=}\ q_k = q_k(Q_i, P_i)\right)$

$\vec{p} = \vec{\nabla}_r R_2 \quad \left(\hat{=}\ p_k = \partial_{q_k} R_2\right)$

$\quad = q\vec{A} + \vec{P} \quad \left(\hat{=}\ p_k = p_k(Q_i, P_i)\right)$

$$\Rightarrow H'(\vec{R},\vec{P}) = \frac{\vec{P}^2}{2m} + q\phi(R,t) + q\vec{R}\cdot\partial_t\vec{A}(t)$$

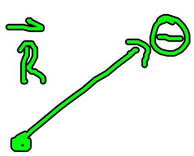
$$= \frac{\vec{P}^2}{2m} - q\left(\vec{R}\cdot\vec{E}_L(t)\right) - q\vec{R}\cdot\vec{E}_T(t)$$

$$= \frac{\vec{P}^2}{2m} - q\vec{R}\cdot\vec{E}(t)$$

es gibt nicht $\vec{A}, \phi$
sondern $\vec{E}$ als messbare Größe

$$= \frac{\vec{P}^2}{2m} - \vec{d}\cdot\vec{E}(t)$$

kinetische Energie d. Elektrons + Energie d. Elektrons im Feld $\underline{\underline{\vec{E}(t)}}$



$\vec{d} = q\vec{R}$ Dipolmoment d. Elektrons

4.3. Hamilton-Jacobi-Theorie

kanonische Gl. in den neuen Koordinaten

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \quad , \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}$$

möglichst einfaches Problem erzeugen, indem $H' = 0$ (dann $\dot{P}_k = \dot{Q}_k = 0 \Rightarrow P_k, Q_k$ sind konstant)
kann u.U. durch eine kanonische Trafo gefunden werden

wissen: $H' = H + \partial_t R_2$

$$\overset{\shortparallel}{0} = H + \partial_t R_2$$

Bestimmungsgleichung von $R_2(q_k, P_k, t)$

$$H(q_k, p_k, t) + \partial_t R_2(q_k, P_k, t) = 0$$

$p_k = \partial_{q_k} R_2$

partielle Ableitg.

$$H\left(q_k, \frac{\partial}{\partial q_k} R_2(q_k, P_k), t\right) + \partial_t R_2(q_k, P_k, t) = 0$$

alle in Koordinaten q_k, P_k gegeben

$\longrightarrow$ partielle Dgl. f. R_2 in q_k, P_k.

Notation oft R_2 wird oft W genannt

ist aber auch gleich Wirkung S (s.z.)

$$R_2 = W = S$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

Hamilton-Jacobi-Gleichg. f. Erzeuger S, R_2, W

$$H(q_k, \partial_{q_k} W, t) + \partial_t W(q_k, P_k, t) = 0$$

a) Die Hamilton-Gl. sind ersetzt durch eine partielle Dgl. f. W

die f $\underbrace{\text{Parameter}}_{P_k}$ enthält und f $\underbrace{\text{Variable}}_{q_k}$ hat : bestimmen die Ableitg. v W

b) Bsp. freies Teilchen

$$H = \frac{P_x^2}{2m} \, , \quad W = W(x, P_x, t)$$

$$H(x, \partial_x W, t) + \partial_t W(x, P_x, t) = 0$$

$$\frac{(\partial_x W)^2}{2m} + \partial_t W = 0$$ diese partielle Dgl ist zu lösen

$$W = P_x x - \frac{1}{2m} P_x^2 t$$ Beweis durch Einsetzen

$$X = ? = \partial_{P_x} W = \underbrace{x - \frac{P_x}{m} t}_{=0 \text{ oder konst}} = \text{Konst}$$

gleichförmige Bewegg.

$$x \sim \frac{P_x}{m} t = v_x t$$

Die kanonische Trafo vermittelt zwischen Laborsystem und dem mitbewegten System, in dem X = konst ist.

man erkennt Aspekte der Quantenmechanik:

$$W = p_x x - \underbrace{\frac{p_x^2}{2m}}_{E} t = p_x x - Et = \hbar \underbrace{(k_x x - \omega t)}_{\text{Phase einer Welle}}$$

$p_x \to \hbar k_x$, $E \to \hbar\omega$

es gilt u.U. eine Formulierung der Mechanik mit $\psi(x,t) \sim e^{i(k_x x - \omega t)}$

Schrödingergl. f. Welle ψ

c) W ist die Wirkung S, $S = \int dt' \, L(t') = W$

$$S = W$$

Es ist zu zeigen: $\frac{d}{dt} W = L$

p_k konstant

$$\frac{d}{dt} W(q_k, P_k, t) = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial W}{\partial q_k}}_{p_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial P_k} \dot{P}_k}_{=0} \right) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} W = \sum_k p_k \dot{q}_k - H$$

Hamilton-Jacobi Gl.

$$\left(H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L \right)$$

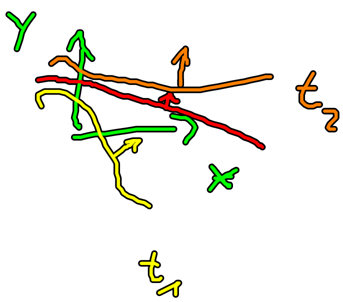
$\rightarrow \frac{d}{dt} W = L$

damit ist $W = S$!

d) Interpretation von W / S :

man spricht von Führungswellen eines Teilchens :

Fläche gleicher Phase ansehen .



f t_1 = konst sucht man zu S = konstant

die zugehörige Fläche

$\rightarrow S$: Welle interpretation

Wdh : $p = \partial_q S$

$\vec{p} = \vec{\nabla}_r S$ $\perp$ auf Fläch konstanter Wirkg.

Beweg. // zu $\vec{p}$ erfolgt $\perp$ zu Äquiwirkungsflächen

$\exists$ Zshg. mit Optik „ Eikonalgleichung "

e) Wenn H nicht von der Zeit abhängt ,

so ist ein Separationsansatz

$$S(q_k, P_k, t) = \underbrace{-Et}_{\substack{\text{zeitabhängig} \\ E = \text{konstant}}} + \underbrace{\bar{S}(q_k, P_k)}_{\text{ortsabhängig}} \quad \text{möglich.}$$

$$H(q_k, \partial_{q_k} S) + \partial_t S = 0$$

$$H(q_k, \partial_{q_k} \bar{S}) - E = 0$$

$$\boxed{H(q_k, \partial_{q_k} \bar{S}) = E = \text{konst}}$$

Gleichung f. $\bar{S}$, nicht zeitabhängig

stationäre H-J Gleichung $\rightarrow$ einfacher

Vorgehensweise f. Hamilton-Jacobi-Theorie

1) man besorgt sich $H(q_k, p_k, t)$

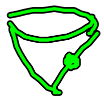
2) man schreibt die H-J. Gleichg. auf: $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$

3) zunächst Separationsansatz um Zeit / Ort zu trennen

4) wenn S gefunden ist, so bekommt man Bahnkurven Q_k

und $Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = \underbrace{\text{funktion}\,(q_k, P_k, t) = \text{konstant}}_{\underbrace{q_k = q_k(P_k, t)}_{\text{Bahnkurve}}}$

konstant in S

Beispiel:  Teilchen auf Kegel mit Schwerkraft

zu 1) $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$ (2 VL vorher)

zu 2/3) $\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \bar S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial \bar S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} + mgr\cos\alpha = E$

ist bereits separiert in Zeit

$\bar S = \bar S(r, \varphi)$

weiterhin: $\bar S = S_r(r) + S_\varphi(\varphi)$

$$\boxed{\frac{r^2\sin^2\alpha}{2m}(\partial_r S_r)^2 + \frac{1}{2m}(\partial_\varphi S_\varphi)^2 + mgr\cos\alpha\sin^2\alpha\, r^2 = r^2\sin^2\alpha\, E}$$

$$\underbrace{(\partial_\varphi S_\varphi)^2}_{\text{alle } \varphi} = \underbrace{2mr^2\sin^2\alpha\left(E - mgr\cos\alpha - \frac{1}{2m}(\partial_r S_r)^2\right)}_{\text{alle } r} = \text{Konstante}$$

nicht von r, φ abhängig

Abhängigk.   Abhängigkeit $\equiv \alpha_\varphi^2$

Drehimpuls

umstellen nach $\partial_r S_r$:

$$\partial_r S_r = \left(2m \left\{ E - mgr\cos\alpha - \frac{\alpha_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} \right) \right)^{1/2}$$

das Problem zerfällt also in $S_\varphi + S_r = \bar{S}$,

jedes S_φ, S_r erfüllt getrennte Dgl.

$\rightarrow$ S_r, S_φ : kann durch gewöhnliche Dgl. bestimmt werden.

zu 4) trenne die Variablen $\frac{d}{dr} S_r = f(r)$ $\longrightarrow$ elliptische Integrale

Grenzfall $\alpha_\varphi = 0$ (Kugel rollt nach unten)

Drehimpuls $= 0$

$$\Rightarrow S_r = (2m)^{1/2} \left(E - mgr\cos\alpha \right)^{3/2} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{mg\cos\alpha} \right)$$

Bahnkurve : S muß nach Impulsen abgeleitet werden.

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = \text{konst} \quad , \quad P_k \text{ wähle: } E, \alpha_\varphi$$

$$S = S_\varphi + S_r - Et$$

$$\text{konst} = \frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{mg\cos\alpha}} \left(E - mgr\cos\alpha \right)^{1/2} - t$$

Bahnkurve: $r = r_0 - \frac{t^2}{2} g \cos\alpha$ o.B.

unter Verwendg. v. AB