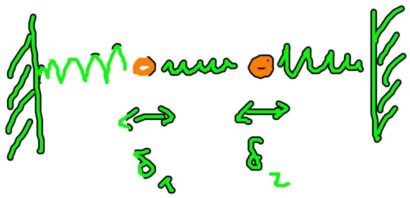
Diskussion der Normalmoden δ_+, δ_-



$\delta_1 = x_1 - x_1^0$

$\delta_2 = x_2 - x_2^0$

$$\underbrace{\delta_+ = \delta_1 + \delta_2 , \quad \delta_- = \delta_1 - \delta_2}_{\text{Trafo}} , \quad \underbrace{\delta_1 = \frac{\delta_+ + \delta_-}{2} , \quad \delta_2 = \frac{\delta_+ - \delta_-}{2}}_{\text{Rücktrafo}}$$

(i) $\underbrace{\delta_+ = 0}_{\text{schwingt nicht}} \rightarrow \delta_-$ Mode ist bestimmt durch $\delta_1 = -\delta_2$

gegenphasiges Schwingen

(ii) $\underbrace{\delta_- = 0}_{\text{Mode schwingt nicht}} \rightarrow \delta_+$ Mode bestimmt durch $\delta_1 = \delta_2$

Jede Bewegung des Systems ist durch Überlagerung ausdrückbar.
durch die Rücktransformation $\delta_+(t), \delta_-(t) \Longrightarrow \delta_1(t), \delta_2(t)$

allgemeine Lösg. $\delta_\pm = A_\pm \cos(\omega_\pm t + \varphi_\pm)$

Amplitude bekannt

Anfangsbedingung.

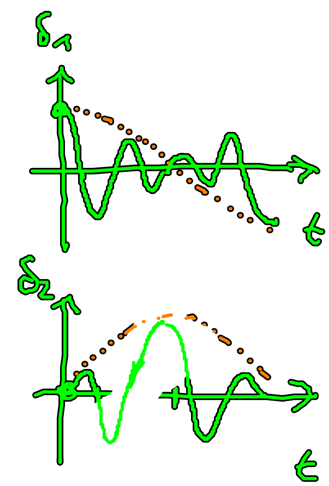
AB als Bsp: $\varphi_\pm = 0$, $A_\pm = A$ Additionstheoreme

$$\delta_1 = A\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right) =$$

$$\delta_2 = A\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right) =$$

$$\delta_1 = 2A \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right)$$

$$\delta_2 = -2A \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right)$$



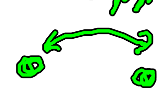
Schwebung

es treten Oszillationen mit $\omega_+ \pm \omega_-$ auf

Interpretation: δ_1 überträgt seine Anfangsenergie auf δ_2

dauert periodisch hin- und her.

Beispiel: Energietransfer in Photosynthese: Kopplg. zw. Molekülen



Farbstoffmoleküle / Pigmente

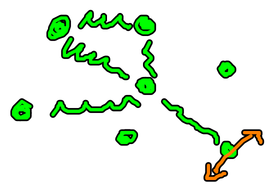
stellt optimale Oszillatoren dar für: Lichtsammeln (Frequenz)

+ Anregungsbeispiel

3. Allgemeine Theorie gekoppelter Schwingg.

N gekoppelte Schwinger in Potential $V(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$

$(\vec{r}_n(t))$



klein $\Longrightarrow$ System immer analytisch lösbar

3.1. Lagrangetechnik f. gekoppelte Oszillatoren

N Teilchensystem: $L = \sum_n \frac{m_n \dot{\vec{r}}_n^{\,2}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n,m} V(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$

kinetische E.   potentielle Energie

$\vec{r}_n : x_{n1}\ x_{n2}\ x_{n3} \quad \forall n \longrightarrow \{q_i\}$ schreiben

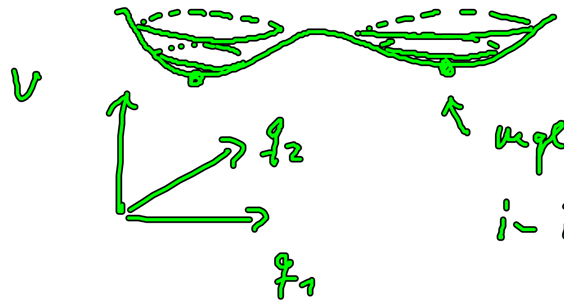
(x, y, z) $i = 1, \ldots, 3N$

f. jeden Massepunkt

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - V(\{q_i\})$$

Kleine Auslenkungen: q_i soll um eine Ruhelage schwingen

Potentiallandschaft



vgl. Ruhelage q_i^0 im Potentialminimum und setze $q_i^0 = 0$ (KS-Verschiebung)

$$V(\{q_i\}) = V(q_i^0 = 0) + \sum_{q_i} q_i \, \partial_{q_i} V(q_i) \Big|_{q_i = 0}$$

Reihe entwickeln

q_i klein

irrelevant wird als Konstante weg differenziert und trägt nicht zu L-Gleichg. bei

verschwindet im Minimum als 1. Ableitg.

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij} q_i q_j \underbrace{\partial_{q_i} \partial_{q_j} V(\{q_i\}) \Big|_{q_i = q_j = 0}}_{k_{ij} \,\hat{=}\, \text{Kraftkonstante}}$$

$$\Rightarrow L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_{ij} \frac{k_{ij}}{2} \underbrace{q_i q_j}_{\text{nicht diagonal also Kopplg.}}$$

gilt also f. kleine Auslenkungen q_i

Bewegungsgleichung: $\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \frac{\partial}{\partial \dot q_n} \sum_i \frac{m_i}{2} \dot q_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} 2 \dot q_i \delta_{ni}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = m_n \dot q_n$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = -\sum_{ij} \frac{k_{ij}}{2} \left(\delta_{in} q_j + q_i \delta_{jn} \right)$$

$$= -\sum_j k_{nj} q_j \qquad k_{nj} = k_{jn}$$

$$i \to j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n}$$

$$\to \quad m_n \ddot q_n + \sum_j k_{nj} q_j = 0$$

n-te Oszillator

koppelt an alle q_j mit Kraftkonstante k_{nj}

<u>Ziel</u> Normalmoden zu finden

$q_n = \frac{u_n}{\sqrt{m_n}}$ neue Koordinate u_n

$$\ddot{u}_n + \sum_j \underbrace{\frac{K_{nj}}{\sqrt{m_n}\sqrt{m_j}}}_{V_{nj}} u_j = 0$$

$$\ddot{u}_n + \sum_j V_{nj}\, u_j = 0$$

$$u_j = A_j(\omega)\, e^{i\omega t}$$

Ansatz mit unbekannten ω, A

erinnert an harmonischen Oszillator

Amplituden

Einsetzen:

$$-\omega^2 A_n + \sum_j V_{nj} A_j = 0$$

$$\boxed{\sum_j V_{nj} A_j = \omega^2 A_n}$$

$$\hat{V}\, \vec{A} = \omega^2\, \vec{A}$$

Eigenwertproblem

Matrix Zahl

man sucht Eigenwerte ω^2 und Eigenvektor $\vec{A}$ eines

Symmetrische Matrix.

Bemerkg. zur Lösung:

a) Bestimmung von ω^2: um nichttriviale Lösg. $\vec{A}$ zu haben muß Koeffizientendeterminante:

$$\Big| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bekannt}}}{\hat{V}} - \omega^2 \underline{1} \Big| = 0$$

$\rightarrow$ Gleichg. für ω, es gibt N ω's (N-ter Ordnungs gleichg.)

$\omega = \omega_\alpha \quad \alpha : 1, \dots N$ im allgemeinen

(diese ω stellen die Normalmode des Systems dar)

- zu jedem ω_α gibt es ein A_u, also A_u^α

symmetrische Matrix hat orthogonale Eigenvektoren, vollständiges System

$$\sum_\alpha A_u^\alpha A_j^\alpha = \delta_{uj}, \quad \sum_j A_j^\alpha A_j^\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

- jede Lösg u_i kann durch Überlagerung der Basisvektoren ausgedrückt werden.

$$u_i = \sum_\alpha \eta_\alpha A_i(\omega_\alpha)\, \underline{e^{i\omega_\alpha t}}$$

Entwicklungskoeffizient

$$\equiv \sum_\alpha \eta_\alpha \underline{(t)}\, A_i(\omega_\alpha)$$

neue Normalkoordinaten

wenn das stimmt, dann muß die L in η_α als ungekoppelte Oszillatoren geschrieben werden können. $L = T - V$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i \dot{u}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{\underline{i},\alpha,\beta} \dot{\eta}_\alpha \dot{\eta}_\beta\, A_{\underline{i}}(\omega_\alpha)\, A_{\underline{i}}(\omega_\beta)$$

$$= \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha \dot{\eta}_\alpha^2$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij} v_{ij} u_i u_j = \sum_{\substack{ij\\ \alpha\beta}} \underline{v_{ij}}\, \eta_\alpha \eta_\beta\, A_i(\omega_\alpha)\, \underline{A_j(\omega_\beta)}$$

$$= \rightarrow \omega_\beta^2 A_i$$

$$= \sum_{i\alpha\beta} y_\alpha y_\beta \underline{A_i(\omega_\alpha)}\,\underline{A_i(\omega_\beta)}\,\omega_\beta^2$$

$$= \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_\alpha \omega_\alpha^2 y_\alpha^2$$

$$\boxed{L = \sum_\alpha \frac{\dot y_\alpha^2}{2} - \sum_\alpha \omega_\alpha^2 y_\alpha^2}$$

$V_{ij}\, q_i q_j$

$V_{ii}\, q_i^2$

Summe ist unabhängige Oszillatoren

$$\ddot y_\alpha = -\omega_\alpha^2 y_\alpha \quad \text{aus } L\text{-Gleichg.}$$

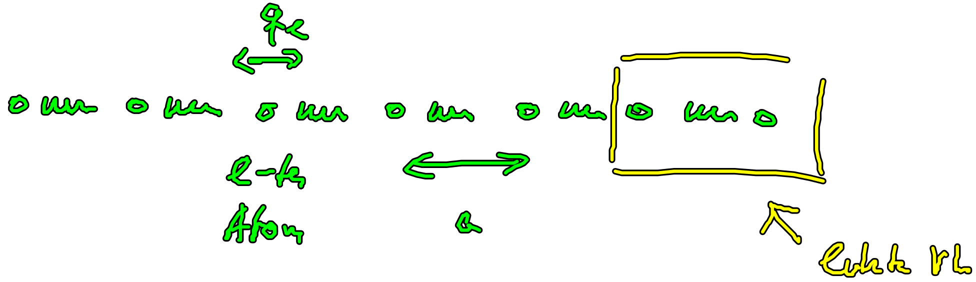
Jedes Problem gekoppelter Schwingungen kann auf unabhängige Schwingungen zurückgeführt werden.

Für unabhängige Schwingg. ist die Lösg. bekannt.

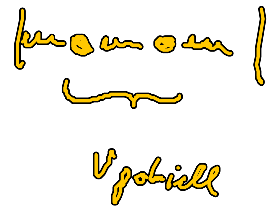
Rückrechenbar auf einzelne Auslenkg.

3.2. Anwendung der Theorie: Schallwellen

Kristalliner Festkörper, Atome in harmonischem Potential



$$L = \sum_\ell \frac{m}{2}\dot q_\ell^2 - \sum_{\ell,k} \frac{K_{\ell k}}{2} q_\ell q_k$$



$$= \sum_\ell \frac{m}{2}\dot q_\ell^2 - \sum_\ell \frac{K}{2}\left(q_\ell - q_{\ell+1}\right)^2$$

(Paar)

$$\sum_\ell \frac{K}{2}\left(q_\ell^2 - 2 q_\ell q_{\ell+1} + q_{\ell+1}^2\right)$$

$\ell \to \ell-1$ $\qquad$ $\ell \to \ell-1$

$$\underbrace{-q_{\ell-1}q_\ell - q_\ell q_{\ell+1}}$$

$$L = \sum_\ell \frac{m}{2}\dot q_\ell^2 - \sum_\ell \frac{K}{2}\left(2 q_\ell^2 - q_{\ell-1}q_\ell - q_\ell q_{\ell+1}\right)$$

$t \to \omega$

Ansatz: $q_\ell = q(t)\, e^{iQa\ell}$ (Fourierreihe) $\qquad \ell \to Q$

Q wie Wellenzahl (Fourierfrequenz)

Lösungen:

$$L = \sum_\ell \frac{m}{2} \dot{q}^2 e^{2iQa\ell} - \sum_\ell K q^2(t)\, e^{2iQa\ell} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-iQa} - \frac{1}{2} e^{+iQa}\right)}_{1-\cos(Qa)}$$

sieht aus wie ungekoppelt

Eigenwertgleichung f. Schwingungsmoden:

$$\left\| V_{ij} - \omega^2 \delta_{ij} \right\| = 0$$

abgeschrieben v. oben: V_{ij} aus L ablesen

$$\left\| \begin{matrix} \underbrace{\frac{2K}{m}(1-\cos(aQ)) - \omega^2}_{\text{einziger Eintrag}} & & 0 \\ 0 & \ddots & \end{matrix} \right\|$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{2K}{m}\left(1 - \cos(aQ)\right)$$

$$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\left|\sin\left(\frac{Qa}{2}\right)\right|}$$

<u>Bemerkung</u>: a) ω ist Normalmode, abhängig von Q

<u>Licht</u>: $\omega = c\,k$

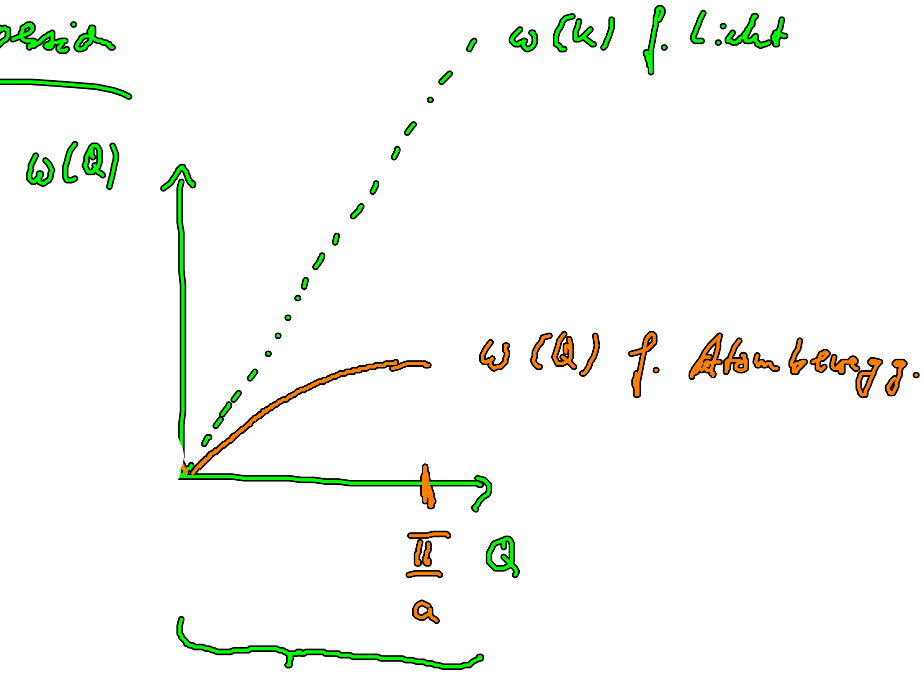
Frequenz — Wellenzahl

<u>hier</u> $\omega = \omega(Q)$ <u>Dispersionsrelation</u>

b) allgem. Lsg.

$$q_l = \sum_Q c_Q \, e^{iQal} \, e^{i\omega(Q)t}$$

c) <u>Dispersion</u>



Schallwellen mit Dispersion $\omega(Q)$

$$\underbrace{\lambda = \frac{2\pi}{Q}}$$

es existiert ein minimales λ, also ein größtmögl. Q:

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi}{Q_{max}}$$