4.2.2.3 Anwendung Stabilitätsanalyse auf Eulergleichung des freien Kreisels

Kräftefreier Kreisel mit 3 Fixpunkten $p = p_0, \; q = 0, \; r = 0$

$+\ 2\times$ zyklisch vertauscht

$$\underbrace{\begin{aligned} \dot p &= f_p = \frac{B-C}{A}\, q r \\ \dot q &= f_q = \frac{C-A}{B}\, p r \\ \dot r &= f_r = \frac{A-B}{C}\, p q \end{aligned}}_{\text{Form } \dot x_i = f_i} \quad \underbrace{\begin{aligned} &= 0 \\ &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}}_{\text{Fixpunkte}}$$

Frage nach **Stabilität der Fixpunkte**

<u>Idee</u>: Untersuchung kleiner Auslenkung $\delta\vec{x}$ aus Ruhelage, zerlegt nach Eigenvektoren $\vec{u}_n$ und Eigenwerte λ_n der Jacobimatrix J:

$$\delta\vec{x} = \sum_n e^{\lambda_n t}\, \vec{u}_n\, \varepsilon_n \,, \qquad J = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \underline{\underline{f_{j,i}}}$$

$(x_i \to p, q, r \;,\; f_j \to f_p, f_q, f_r)$

$$
J = \begin{pmatrix} f_{p/p} & f_{q/p} & f_{r/p} \\ f_{p/q} & f_{q/q} & f_{r/q} \\ f_{p/r} & f_{q/r} & f_{r/r} \end{pmatrix}\Bigg|_{\text{Stelle d. Fixpunkts}} = \overset{A_{ij}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A-B}{C}\,p_0 \\ 0 & \frac{C-A}{B}\,p_0 & 0 \end{pmatrix}}
$$

Fixpunkt $\vec{\omega}_0 (p_0, 0, 0)$

$q_0 = 0$ $\quad$ $r_0 = 0$

Eigenwerte über Lösg. der charakteristischen Gleichung: $\lambda_n = ?$

Determinante der $\| \text{Matrix} - \lambda \hat{I} \|$

$$
-\lambda \left(\lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{B \cdot C}\, p_0^2 \right) \overset{!}{=} 0
$$

damit nichttriviale Lsg. existiert

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ≙ kubische Gleichung

a/ $\lambda_1 = 0$ ≙ $e^{0t} \cdot \vec{u}_1$ ≙ konstante Störung

Eigenvektor zum Eigenwert 0 : $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & x' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Störung in x-Richtung mit kleiner Größe $\vec{u}_1$

von $\vec{\omega}$

Klein Störung zu $(p_0 + \varepsilon_1 \vec{u}_1, 0, 0)$

Konstante Störung.

b) $\lambda_{2/3} = \pm p_0 \left(\frac{(C-A)(A-B)}{C \cdot B} \right)^{1/2}$

$1\times$ positiv / $1\times$ negativ

d.h. offensichtlich, wenn $(\quad) > 0$ ist

dann gibt es eine Instabilität weil $\lambda_2 > 0$

wann $(C-A)(A-B) > 0$?

ist > 0 wenn : $C > A > B$ oder auch $C < A < B$

Die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment A ist instabil wann stabil?

wenn unter $\sqrt{\ }$ Ausdruck etwas negatives steht so $\lambda \to \underline{i}\, a$ $\Rightarrow$ stabil weil Oszillation mit $e^{ia\varepsilon}$ entstehen und diese beschränkt sind:

wenn: $A > C, B$ oder auch $B > A$, $C > A$

Die Rotation um die x-Achse ist stabil wenn A das kleinste / größte Trägheitsmoment ist bzw instabil wenn A das mittlere Trägheitsmoment ist.

4.2.2.4. Kräftefreier symmetrischer Kreisel mit $\vec{\omega}(t)$

symmetrisch: $A = B$ (Zylindersymmetrie)

Kräftefrei: $\vec{M}$ (Drehmoment) $= 0$

Eulergleichung: (Σ') ↓ später (Σ)

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} - (A-C)\,qr &= 0 \\ A\dot{q} + (A-C)\,pr &= 0 \\ C\dot{r} \quad \cancel{(A-B)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

erlaubt Schlusssätze: 1. Gl. mit p, 2. Gl. mit q multiplizieren, Gl. addieren

$$\frac{A}{2}\frac{d}{dt}p^2 + \frac{A}{2}\frac{d}{dt}q^2 = 0$$

$\curvearrowright p^2 + q^2 = \text{konstant}$

$\longrightarrow \dot{r} = 0 \curvearrowright r = r_0 = \text{konst}$

$\Downarrow$ Die z' Komponente von $\vec{\omega}'$ ist konstant ebenso $p^2 + q^2 + r_0^2 = |\vec{\omega}'|^2$
$= \text{konstant}$.

Die gesamte Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'(t)$ hat einen konstanten Betrag

anwenden $r = r_0$ und Gl. f. p differenzieren nach t

$$A\ddot{p} - (A-C)\,\dot{q}\,r_0 = A\underline{\underline{\ddot{p}}} + \frac{(A-C)^2}{A}\underline{\underline{p}}\,r_0^2 = 0$$

$\dot{q}$ aus 2. Gleichung einsetzen

$$\Downarrow \quad \ddot{p} + k^2 p = 0 \quad \text{mit } k = \frac{(A-C)}{A} r_0$$

Oszillatorgleichung.

ebenso:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0$$

Lösung f. p, q: $\quad p/q = A \sin kt + B \cos kt$

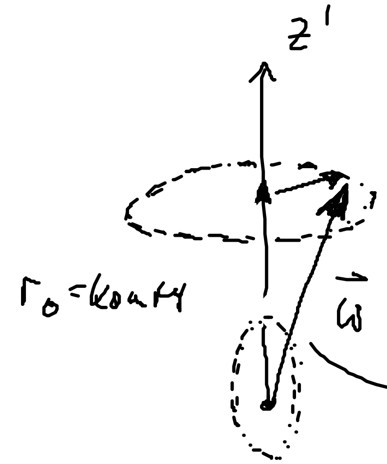
Konstanten aus Anfangsbedingungen

$p = p_0 \sin(kt)$ $q = p_0 \cos(kt)$ $\Longrightarrow$ Kreisbewegg.

erfüllt Dgl. + Erhaltungssatz $p^2 + q^2 = p_0^2$

Einung a Kreisbewegg:

$\hat{=}$ „Figur.achse" Richtg. im Kreisel // r_0-Richtg.



$\vec{\omega}$ absolviert ein Kreisbewegg. parallel zu x', y' Ebene mit konstanter z'-Komponente r_0.

Kegel wird Polkegel genannt

Umrechg. d. Dynamik von $\Sigma' \to \Sigma$

letzte VL: Umrechng. von $p \to p(\vartheta, \varphi, \psi)$, q, r analog

$$p = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi = p_0 \sin(kt)$$

$$q = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \cos\psi = p_0 \cos(kt)$$

$$r = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi} = r_0 = \text{konst}$$

↑

Spezialisiert f. unseren Fall

bei kräftefreiem Kreisel ist $\vec{L}$ erhalten in Σ System $\dot{\vec{L}} = 0$

aufspannen im Σ' System, in dem $\vec{L}' \neq$ konstant ist

Umrechnung.

$$L'_x = L_0 \sin\vartheta \sin\psi = A p = A(\dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi)$$

$$L'_y = L_0 \sin\vartheta \cos\psi = A q = A(\dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \cos\psi)$$

$$L'_z = L_0 \cos\vartheta = C r = C r_0 \qquad (*1)$$

Länge des Drehimpuls ist erhalten

aufspannen mit Euler ∢

im Hauptachsensystem

Zshg. L' und ω'

1 2 3 4

aus 2. und 4. Spalte:

(i) $\vartheta = \vartheta_0 =$ konstant um die Dgl. zu erfüllen

(ii) $\dot\varphi =$ konstant $\rightarrow \varphi = c_1 t + c_2$

aus 3. und 2. Spalte

$$A p_0 \sin(\underline{\underline{kt}}) = L_0 \sin\vartheta_0 \sin\underline{\underline{\psi}}$$

$$A p_0 \cos(\underline{\underline{kt}}) = L_0 \sin\vartheta_0 \cos\underline{\underline{\psi}} \qquad (*2)$$

$\Downarrow \; \psi = k t$

Die Eulerwinkel sind $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = c_2 t + c_1$, $\psi = k t$

verbleibende Konstanten sollten nur von $\underbrace{A, C}_{\text{Geometrie}}$, $\underbrace{p_0, r_0}_{\text{AB}}$ festgelegt sein.

$$\left.\begin{aligned} (*1):\quad \cos\vartheta_0 &= \frac{C r_0}{L_0} \\ (*2)\quad \sin\vartheta_0 &= \frac{A p_0}{L_0} \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{A}{C}\,\frac{p_0}{r_0}$$

analog f. φ:

$$\varphi = \frac{p_0}{\sin\vartheta_0}\, t + \varphi_0$$

freier Winkel am Beginn

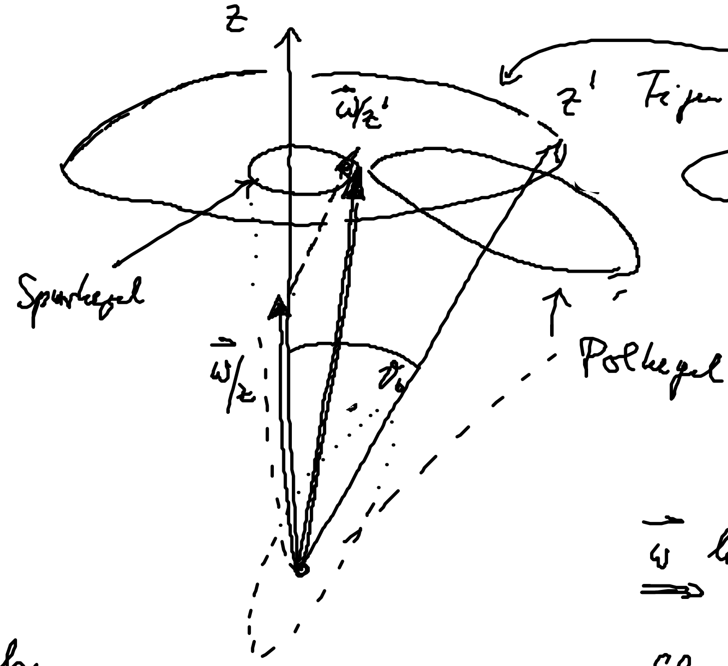
Eulerwinkel sind komplett durch AB (r_0, p_0) und Geometrie (A, C) bestimmt, ϑ ist konstant, φ und ψ wachsen linear mit Zeit.

Interpretation:

$\vec{L}$ = konst, $\hat{=}$ z-Achse

a) Figurenachse in Σ' umläuft die z Achse ($\vec{L}$) mit fest $\sphericalangle\ \vartheta_0$.

→ entsteht <u>Nutationskegel</u>



wo liegt die Drehachse in Σ ?

$$\underline{\vec{\omega}|_z = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z}$$

$\vec{\omega}$ liegt in der z, z' - Ebene $\Longrightarrow$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \dot{\psi}\, \vec{e}_{z'}$$

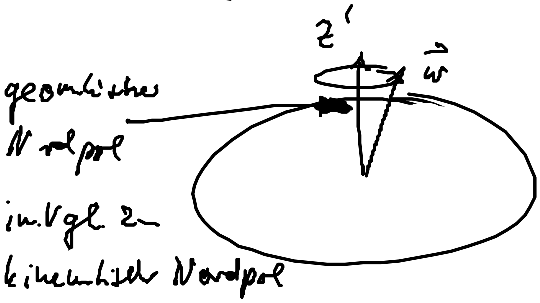
b) gleichzeitig findet auch Drehg. mit $\sphericalangle$ statt mit $\vec{\omega}|_{z'} = \dot{\psi}\, \vec{e}_{z'}$

c) $\vec{\omega}$ wandert mit z' „mit" und beschreibt den Spurkegel

d) Pol- und Spurkegel rollen aufeinander ab

Die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ ändert ständig ihre Richtung, Betrag bleibt konstant.

Beispiel Erde als abgeplattetes Rotationsellipsoid



$\vec{\omega}$ läuft um die Figurenachse und beschreibt einen Polkegel

p, q-Komponente: Kreisbewegg.

$$K = \underbrace{\frac{C-A}{A}}_{\substack{\text{Hauptträgheitsmomente} \\ \downarrow \\ \frac{1}{300}}} r_0$$

ist Oszillationsfrequenz der Kreisbewegg.

r_0: z'-Komponente der $\vec{\omega}'$

$$r_0 = \frac{2\pi}{1\,\text{Tag}}$$

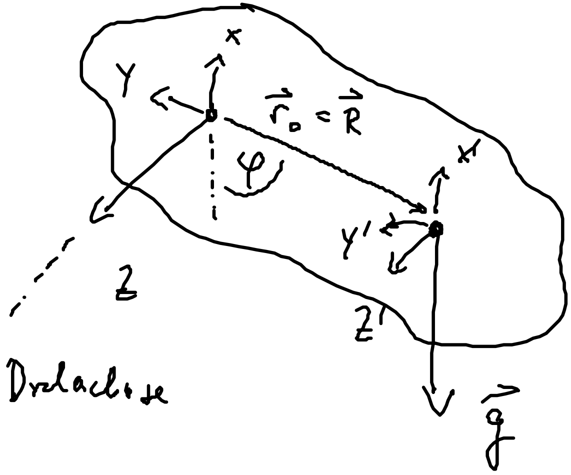
$$T = \frac{2\pi}{K} = 300 \text{ Tage}$$

Messg: 433 Tage, weil Erde kein ideal starrer Körper.

(Chandler)

4.2.2.5 physisches Pendel

einfachste Bewegung mit fester Achse und Schwerkraft



Rotation eines starren Körpers
um feste Achse in z-Richtung

$\vec{R}$ Schwerpunkt

$\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$

Eulergleichung: $\dot{\vec{L}}' + \underbrace{\vec{\omega}' \times \vec{L}'}_{} = \vec{M}'$

hat keine z'-Komponente
weil $\vec{\omega}$ in z' Richtg. ($\parallel z$) zeigt
denn Kreuzprodukt $= 0$

$$\dot{L}_z' = M_z' = \left[M \vec{r}_0 \times \vec{g} \right]_z$$

M: Gesamtmasse d. starren Körpers

VL starrer Körper III

$$\dot{L}_z' = -M \overbrace{r_0\, g \sin\varphi}^{\text{Kreuzprodukt}}$$

rechte Handregel

wissen: $L_z' = \Theta_{zz}\, \omega_z'$ Rotation um feste Achse

$$\Rightarrow \quad \Theta_{zz}\, \dot{\omega}_z' = -M r_0\, g \sin\varphi$$

mit $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z$,

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{M r_0 g}{\Theta_{zz}} \sin\varphi} = -\frac{g}{l_{eff}} \sin\varphi$$

ist Schwingungsgleichg. analog Fadenpendel wenn die Frequenz über effektive Fadenlänge $\left(\frac{\Theta_{zz}}{M r_0}\right)$ interpretiert wird. (analoge Beschreibg.)

Was ist Θ_{zz}?

Achse im Schwerpunkt

$$\Theta_{zz} = \Theta_S + M r_0^2$$

nach Satz v. Steiner