

E-Dynamik: Feldtheorie

→ Vektoranalysis ist wichtig!

Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}, t)$

speziell: $\underline{A} \rightarrow \varphi(\underline{r}, t)$ skalares Feld

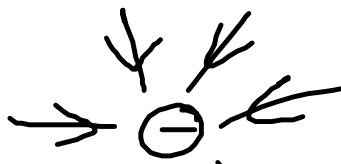
Gradient: $\nabla \varphi$ Gradient \rightarrow Wie ändert sich φ
mit \underline{r}
Nabla-Operator

Kurz: $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$

Jetzt: $\underline{A}(\underline{r}, t)$ ist wirklich ein Vektor

Divergenz von A

⇒ Aussage über die sogenannte
Quelldichte



Definition (für eine feste Zeit t)

"Fluss" von \underline{A} durch die Fläche $F_{\Delta V}$

$$\operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{F_{\Delta V}} d\underline{F} \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

Interpretation:

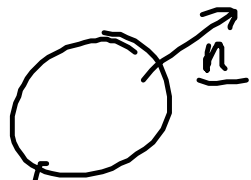
Die Divergenz ist ein Maß für die durch $F_{\Delta V}$ strömenden Feldlinien!

Integral über die geschlossene Oberfläche des kleinen Volumens

$$d\underline{F} = dF \underline{n}(\underline{r}')$$

↑ Flächennormalenvektor

(ist immer nach außen gerichtet!)



Kugelförmiges ΔV

Bemerkungen

• Auswertung in kartesischen Koordinaten (man wählt ΔV als Würfel) ergibt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) &= \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) \\ &= \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\underline{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\underline{r})}{\partial z} \end{aligned}$$

• Das Ergebnis der Divergenz ist ein Skalar.

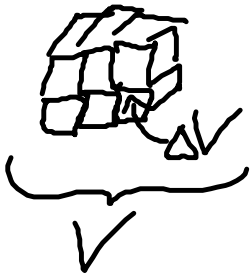
• Beispiel-

$$\operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}, t)$$

(eine der Maxwell-Gleichungen)

gesamte
Ladungsdichte
am Ort \underline{r} zur Zeit t

• Wende die ^{Integral-} Definition von $\operatorname{div} \underline{A}$ auf eine Vielzahl miteinander verbundener Röhren bzw. Volumina an!



$$\int_V \operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) = \oint_{\partial V} \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}$$

geschlossene Oberfläche über das gesamte Volumen

Gauß'scher Integral Satz

→ verknüpft Volumenintegral über die Divergenz eines Feldes mit dem Oberflächenintegral über das Feld an sich!

Rotation

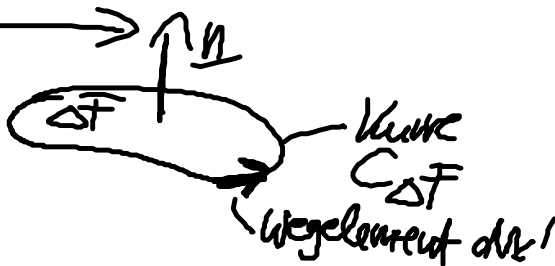
Frage: Bilden die Feldlinien von $\underline{A}(\underline{r})$ einen Wirbel?

Antwort: Berechne die lokale Wirbelstärke von \underline{A} am Ort $\underline{r} \Rightarrow$ Rotation

Definition (Koordinaten unabhängig!)

$$\textcircled{*} \text{rot } \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{n} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C_{\Delta F}} d\underline{r}' \cdot \underline{A}(\underline{r}')$$

Normalen
vektor auf
 ΔF



Integral über die geschlossene
Kurve $C_{\Delta F}$ um die Fläche
 ΔF

Bemerkungen

• $\text{rot } \underline{A}(\underline{r})$ ist ein Vektor

$\Rightarrow \text{rot } \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{n}$ ist die Komponente von $\text{rot } \underline{A}(\underline{r})$ in Richtung \underline{n}

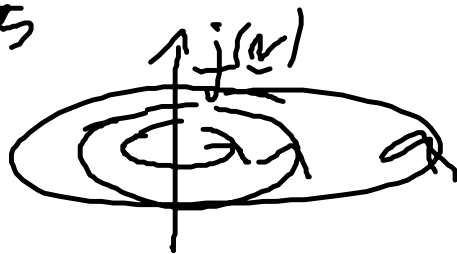
• In kartesischen Koordinaten

$$\text{rot } \underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

Vektor!

$$= \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

- Beispiel = Magnetfeld eines Stromdurchflossenen Drahtes



Konzentrische Kreise

$$\nabla \times \underline{B}(r) \sim j(r)$$

(vgl. $\nabla \cdot \underline{E}(r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$)

Stoke'scher Integralsatz

betrachte viele miteinander verbundene

Flächenelemente $\Delta F_i \rightarrow$ Gesamtfläche F

$$\int d\underline{F}' \cdot (\nabla \times \underline{A}(r')) = \oint d\underline{r}' \cdot \underline{A}(r')$$

Flächenintegral über die
Gesamtfläche

Kurvenintegral über
das Feld

Helmholtz-Theorem

Jedes 2-fach stetig differenzierbare Vektorfeld kann man in einen wirbelfreien Anteil und quellenfreien Anteil zerlegen

eindeutig

$$\underline{A}(r) = \underline{A}_1(r) + \underline{A}_2(r)$$

$$\nabla \cdot \underline{A}_1(\underline{r}) = 0, \quad \nabla \times \underline{A}_2(\underline{r}) = 0$$

quellfreie Anteil wirbelfreie Anteil

II. Elektrostatik

→ Phänomene, die zeitliche Variationen Ladungen und zeitlich verändernde elektrische Felder involvieren

II.1. Grundlagen

II.1.1. Coulombsches Gesetz

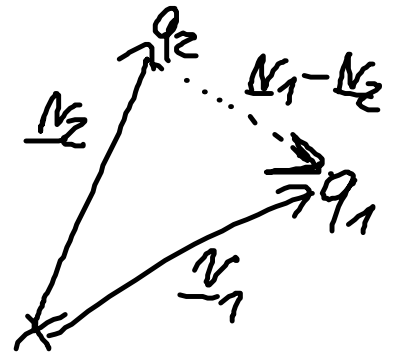
Ausgangspunkt:

Es gibt 2 Sorten von Ladungen, positiv und negativ.
Diese Ladungen üben Kräfte aufeinander aus.

Betrachte konkret zwei punktförmige Ladungen q_1, q_2 an den Orten \underline{r}_1 und \underline{r}_2 (die Ladungen ruhen!)

$$\underline{F} = K q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

Coulombkraft (1785) ← Konstante



Bemerkungen

- K ist eine positive Konstante.

Es gibt für K zwei Wahlmöglichkeiten. Diese bestimmen auch die Einheit der Ladung

- $K=1$ "Gauß-System" (CGS)

Centimetre Gram Second

veraltet, aber immer noch in vielen (guten) Lehrbüchern zu finden!

Folgerung für die Einheit der Ladung:

$$[q] = \sqrt{[\text{Kraft}] \cdot [\text{Länge}]}$$

\downarrow $N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ \downarrow m

⇒ Die Einheit der Ladung ist also nun durch mechanische Größen bestimmt

• $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ϵ_0 : Permittivität (Dielektrizitätskonstante) des Vakuums

$\epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Diese Wahl nennt man "SI-System" (hat sich inzwischen durchgesetzt) *Système International d'Unités*

Wir benutzen hier in der VL SI

Einheit der Ladung $[q] = \sqrt{\frac{As}{Vm} \cdot N \cdot m} = As = 1C$

ϵ_0 Kraft Länge $1V = \frac{Nm}{As}$ 1 Coulomb

• Die Coulombkraft hat die Abstandsabhängigkeit $\frac{1}{r^2}$

— Abstand der Punktladungen

— wie Gravitationskraft

aber: Coulombkraft ist viel stärker!

Betrachte 2 Elementarladung (2 Elektronen)
im Abstand eines Bohr-Radius $a_B = 0.53 \text{ \AA}$

$$F_{\text{Coul}} \sim 10^{-8} \text{ N}$$

10^{-10} m

$$F_{\text{grav}} \sim 10^{-47} \text{ N}$$

Unterschied
von 39 Größenordnungen

- Gültigkeit: Die Coulomb-Kraft ist in der angegebenen Form gültig bis hin in den atomaren Bereich

$$r \geq 10^{-13} \text{ m}$$

Für noch kleinere Abstände gibt es Korrekturen aus der Quantenelektrodynamik:
Grund: Wechselwirkung zw. geladenen Elementarteilchen und den "Austauschteilchen" der elektromagnet. WW, den Photonen

II.1.2. Das elektrostatische Feld

Aus dem Ausdruck für die

$$\text{Coulombkraft } \underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

läßt sich das Feld $\underline{E}(\underline{r})$ definieren

Betrachte das Feld, das durch eine Ladung q_2 am Ort \underline{r}_2 an dem Ort \underline{r}_1 erzeugt wird

$$\textcircled{*} \underline{F}(\underline{r}_1) \stackrel{!}{=} q_1 \underline{E}(\underline{r}_1)$$

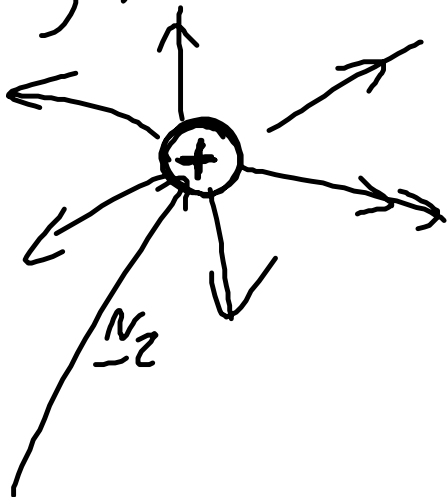
$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

Man sieht:

Feldlinien von $\underline{E}(\underline{r}_1)$ weisen radial

von \underline{r}_2 weg, und sie sind für $q_2 > 0$ ($q_2 < 0$)

weg von (hin zu) q_2 gerichtet



Einheit des elektr. Feldes

$$\text{Feld} \hat{=} \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$$

$$[E] = \frac{\overset{\text{Newton}}{N}}{\underset{\text{Coulomb}}{C}} = \frac{V}{m}$$

benutze
 $1V = \frac{Nm}{As}$

$$1C = As$$

Verallgemeinerung des Punktladungsmodells

- o Betrachte statt einer Punktladung viele Punktladungen q_i , $i=1, \dots, N$, am Orten r_i

Es gilt:

Kräfte auf eine Ladung q bei r , die durch die q_i hervorgerufen werden, addieren sich auf

→ Superpositionsprinzip

$$\Rightarrow \underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{r - r_i}{|r - r_i|^3}$$

$$\boxed{\nabla \cdot E(r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}}$$

$$r_i \neq r \quad \forall i$$

• Betrachte anstatt einzelner ("diskretisierter") Ladungen q_i
eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$

$$\rho(\underline{r}) \underbrace{d\underline{r}}_{\text{Volumenelement}} = dq \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ladung in} \\ \text{Volumenelement} \end{array} \right\}$$

Umschreiben des Ausdrucks für das Feld

$$\sum_{i=1}^N q_i \dots \longrightarrow \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \dots$$

— Volumenintegral