IV. Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik

$\Longrightarrow$ Zeitabhängige Phänomene

IV.1. Zusammenstellung der statischen Gleichungen

Zunächst: Einführung neuer Feldgrößen (im Vakuum)

$$\underline{D}(\underline{r}) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) \qquad \text{dielektrische Verschiebung}$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r}) \qquad \text{Magnetfeld}$$

Beachte: Diese einfachen Zusammenhänge gelten nicht in realer Materie, sondern nur im Vakuum!

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) & \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0 \\[1em] \nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 & \nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}) \end{array}}$$

elektrostat. Felder werden durch ruhende Ladungen erzeugt und sind wirbelfrei

magnetostat. Felder werden durch Ströme erzeugt und sind quellenfrei

stationäre

Bemerkungen

- Lineare Diff.-gleichungen 1. Ordnung → Superpositionsprinzip
- Im statischen Fall sind elektrische und magnet. Felder und Phänomene vollständig entkoppelt!
- Die Zusammenhänge sind auch in Materie gültig!
- Potentiale: $\underline{E} = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})$, $\underline{B} = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})$ — wird sich ändern im dynamischen Fall!
- Aus $\nabla \times \underline{H} = \underline{j}(\underline{r})$ folgt

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{H}) = 0 = \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r})$$

entspricht der Kontinuitätsgleichung für den statischen Fall!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$$

Ziel nun:

Formulierung der Maxwellgleichungen für zeitabh. Felder

Beachte zunächst:
Die experimentelle Erfahrung zeigt, dass
die Gleichung $\nabla \cdot D = \rho$

$$\nabla \cdot B = 0$$

auch im dynamischen Fall gelten!

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \;, \quad \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = 0$$

IV.2 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

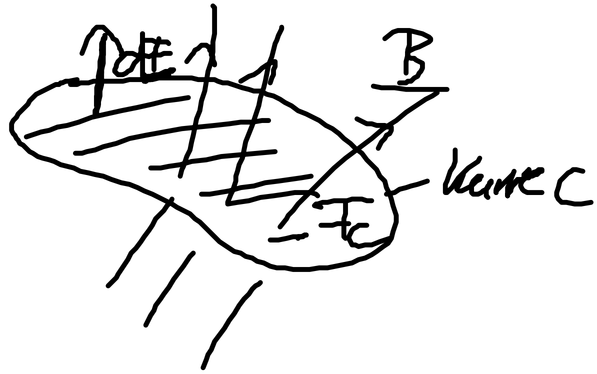
Wir wissen: Stromdichte ($\hat{=}$ bewegte Ladungen) erzeugen magnet. Felder

Frage: Können umgekehrt magnet. Felder auch Ströme ~~erst~~ induzieren?

$\rightarrow$ Faraday'schen Experimente (1831)

Sei F_C eine Fläche (ortsfest!) und C sei der Rand der Fläche; $\underline{B}$ sei ein Magnetfeld

$$\Phi = \int_{F_C} d\underline{f} \cdot \underline{B}$$



magnet. Fluß durch die Fläche

Experimentelle Beobachtung

Falls sich Φ zeitlich ändert $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0\right)$ dann wird in C ein elektrisches Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$ induziert $\longrightarrow$ Stromfluß!

Es gilt:

$$\boxed{\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)}$$

Faraday'sche Induktionsgesetz!

Bemerkungen

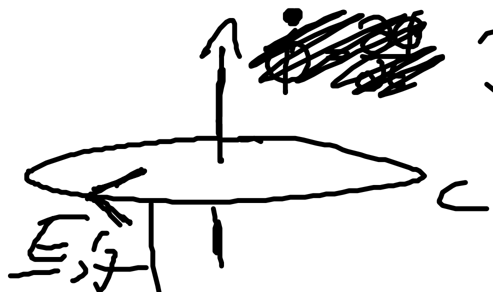
- Zeitliche Änderung von Φ kann z.B. passieren
  - durch Bewegung eines Permanent-Magneten relativ zu F_C
  - Bewegung einer stromdurchflossenen Leiterschleife relativ zu F_C

- $\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \;\hat{=}\;$ Induktions-Spannung

  (konsistent mit $[E] = \frac{V}{m}$)

- Zum Vorzeichen des Stroms

$$\dot{\underline{B}} = \frac{\partial B(\underline{r},t)}{\partial t} \Rightarrow \dot{\Phi}$$



induzierten Richtung des Feldes $\underline{E}(\underline{r},t)$

Strom in C: $\underline{j}(\underline{r},t) \sim \underline{E}(\underline{r},t)$ (d.h. $\underline{j} \parallel$ zu $\underline{E}$)

[IV.d] Differentielle Formulierung des Faraday'schen Gesetzes

$$\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{F_C} d\underline{F}\,(\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t))$$

andererseits

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{F_C} d\underline{F}\cdot\underline{B} = \int_{F_C} d\underline{F}\,\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t)$$

Fläche bewegt sich nicht!

$$\rightarrow \boxed{\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t)}$$

Faraday'sches Gesetz

(ersetzt die Gleichung
$\nabla\times\underline{E}(\underline{r})=0$ in der Statik)

IV. 3. Zur Motivation der Konstanten im Faraday'schen Induktionsgesetz

Ausgangspunkt:

nehme an ! (experimentelle Erfahrung)

$$\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = -K\dot{\Phi}$$

$$= -K \frac{d}{dt}\int d\underline{F} \cdot \underline{B}$$

Offensichtlich gilt $K=1$, aber warum?
und warum sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ gekoppelt?

Überlegung:
Die Kurve C bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\underline{v}$ relativ zum Laborsystem (in dem die Fläche fest liegt)

Beachte:
Das Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$ auf der linken

Seite des Induktionsgesetzes ist

das Feld im mitbewegten Bezugsystem

(Ruhesystem von C)

Die zeitliche Änderung von Φ kann durch 2 Arten erfolgen

a) Positionsänderung des Leiterkreises

b) explizite zeitl. Änderung von B

Formale totale Zeitl. Ableitung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \underbrace{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{B}}_{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Umschreiben des 1. Terms

benutze:

$$\nabla \times (\underline{B} \times \underline{v})$$

$$= \underbrace{(\underline{v} \cdot \nabla)}_{\text{grad}} \underline{B} \underbrace{- \underbrace{(\underline{B} \cdot \nabla)}_{\text{grad}} \underline{v} + \underline{B} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{v})}_{\text{div}}}_{\text{Null, da } \underline{v} \text{ räumlich konstant}} \cancel{- \underline{v} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{B})}_{\text{div}}}_{\text{weg. Maxwell}}$$

$$- \underbrace{(\underline{v} \cdot \nabla)}_{\text{grad}} \underline{B}$$

Kombinieren:

$$\frac{d}{dt} \underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times (\underline{B} \times \underline{v}) + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Zeitl. Änderung des Flusses:

$$\frac{d}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fläche } F_C \text{ bewegt sich nicht}}}{\phi =} \frac{d}{dt} \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \frac{d\underline{B}}{dt}$$

Stokes $\rightarrow$ $$= \int_C d\underline{r} \cdot (\underline{B} \times \underline{v}) + \int_C d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Kombiniere mit Induktionsgesetz

$$\oint_C d\underline{r} \cdot (\underline{E} - k(\underline{v} \times \underline{B}))$$

$$\boxed{\oint_C d\underline{r}\, \underline{E} = -k \frac{d}{dt} \int d\underline{F} \cdot \underline{B}}$$

(*) $$= -k \int_C d\underline{F}\, \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Annahme

Galilei-Invarianz:

Das Induktionsgesetz ist in allen, mit konstanter Geschw. $\underline{v}$ relativ zueinander bewegten Bezugsysteme gleich.

o.k. im nichtrelativistischen Bereich,

d.h. $v/c \ll 1$, aber

streng genommen nicht, wenn $v \to c$!

Außerdem

(*) muß auch dann gelten, wenn $v = 0$; ~~also~~ falls also C im Laborsystem ruht also $\displaystyle\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}' = -k \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

$\underline{v} = 0$

Feld im Laborsystem

Schlussfolgerung (mit Galilei-Invarianz)

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}' = \underline{E} - k\, \underline{v} \times \underline{B}}$$

Feld im Laborsystem

Feld im Ruhesystem (C fixiert)

Verknüpfung der elektrischen Felder ~~E~~ in zwei relativ zueinander bewegten Bezugssystemen
— involviert das $\underline{B}$-Feld

Was ist nun die Proportionalitätskonstante k?

Betrachte dazu eine einzelne Punktladung q,
die in dem bewegten System ruht

Sie erfährt Kraft

$$\underline{F} = q\underline{E}$$ (aus ~~Elektr~~ Elektrostatik)

im Ruhesystem von C

Im Laborsystem bewegt sich die Ladung mit dieser konstanten Geschwindigkeit $\underline{v}$

$\rightarrow$ Strom $\underline{j}(\underline{r}) = q\underline{v}\,\delta(\underline{r}-\underline{R}(t))$

Kraft auf diesen Strom aus dem

Magnetfeld $\underline{B}$

$$\underline{F} = \int d^3r\, \underline{j} \times \underline{B} = q\underline{v} \times \underline{B}$$

Anwendung auf Laborsystem

$\Longrightarrow$ Gesamtkraft im Laborsystem

$$\underline{F}' = q\underline{v} \times \underline{B} + q\underline{E}'$$

Galilei-Invarianz: Die Kräfte in den beiden Bezugssystemen sollen gleich sein!

$$\Rightarrow \underline{F}' = \underline{F}$$

Laborsystem Ruhesystem

$$\Rightarrow q(\underline{E}' + \underline{v} \times \underline{B}) \overset{!}{=} q\underline{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}' + \underline{v} \times \underline{B} = \underline{E}}$$

Konstante k muß gleich 1 sein!

IV. 4. Die Maxwell'sche Ergänzung und die endgültigen Gleichungen

Wir haben bisher

(1) $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$	im Vakuum
(2) $\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$	$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$
(3) $\nabla \cdot \underline{B} = 0$	$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$
(4) $\nabla \times \underline{H} = j$	

noch nicht konsistent!
Das sieht man wie folgt:

Wende auf (4) Divergenz an

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \underline{H})}_{\text{div rot}} = 0 = \nabla \cdot j$$

aber: Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t}$$

Maxwell gelang es, diese Inkonsistenz zu beseitigen
(1865)

Konti. - Gl.

$$\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) = 0$$

benutze $\rho(\underline{r},t) \overset{①}{=} \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},t)$

$$\nabla \cdot \Big(\underline{j}(\underline{r},t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{"Ergänzungsstrom"}} \Big) = 0$$

Maxwell'sche Ergänzung

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)$$

Damit sind die Maxwell-Gl.
mit Konti.-Gl. konsistent!

Bedeutung:

Auch ein zeitl. veränderliches elektrisches Feld
kann ein Magnetfeld erzeugen

$\hat{=}$ Umkehrung des Faraday'schen Gesetzes !