

# V.5. Erzeugung elektromagnet. Erzeugung

Betrachte dazu die Poisson-Gleichung  
in der Lorenz-Form

$$\square \phi(\underline{r}, t) = -\frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \text{mit} \quad \square = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\square \underline{A}(\underline{r}, t) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t)$$

$$\begin{array}{l} \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \\ \underline{E} = -\nabla \phi - \dot{\underline{A}} \end{array}$$

Uns interessiert der Fall  $\rho \neq 0, \underline{j} \neq 0$   
 $\Rightarrow$  inhomogene Wellengleichungen!

Folgerung:

Lösung der Gl. unter der Annahme  
dass keine Randbedingungen außer

den "üblichen":  $\phi, \underline{A} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$

$\uparrow$   
Abstand von der  
Quelle

# V.5.1. Females Lösung, Potentiële Grenzschle Funktionen

wir benutzen wie in der Elektrostatik  
das Konzept der Grenzschle Fkt.

Erinnerung:  $\Delta_{\underline{x}} \phi(\underline{x}) = -\frac{\rho(\underline{x})}{\epsilon_0}$

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{x}-\underline{r}'|}$$

$$= \int d^3r' g(\underline{x}-\underline{r}') \rho(\underline{r}')$$

"Faltung" im Raum

es gilt:  $g(\underline{x}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{r}'|}$

und  $\Delta_{\underline{x}} g(\underline{x}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{x}-\underline{r}')$

## Dynamischer Fall

Sei  $u(\underline{x}, t) = \phi(\underline{x}, t)$  oder  $A_{\alpha}(\underline{x}, t)$

Sei  $f(\underline{x}, t) = \frac{\rho(\underline{x}, t)}{\epsilon_0}$  oder  $\rho_{\alpha} j_{\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ )

zu lösen:  $\square u(\underline{x}, t) = -f(\underline{x}, t)$

Ansatz:

$$u(\underline{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{G(\underline{r} - \underline{r}', t - t')}_{\text{zeit abhängige Green'sche Funktion}} f(\underline{r}', t')$$

Faltung in Raum und Zeit!

Es muß gelten (damit  $\square u = -f$ )

$$\square G(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta(t - t')$$

Interpretation:

$G$  entspricht dem Potential, das von einer punktförmigen Ladungsdichte ( $\rho=1$ ) am Ort  $\underline{r}'$  zu Zeit  $t'$  erzeugt wird

Aufgaben:

$G(\underline{r} - \underline{r}', t - t')$  muß die Kausalitätsbedingung

erfüllen:  $G(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = 0$  falls  $t' > t$

Den: Die Welle  $u(\underline{r}, t)$  darf nur von Quellen aus der Vergangenheit bestimmt sein; zu künftige Zeit dürfte kein Einfluß haben! ( $t < t'$ )

Zur Berechnung von  $g$  benutze Fourier-  
transformierte:

$$f(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\underline{k}, \omega) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

Rücktransfo

$$\hat{f}(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt f(\underline{r}, t) e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

analog für  $u(\underline{r}, t)$

$$\square u(\underline{r}, t) = \left( \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\underline{r}, t) \quad \text{Einsetzen der Fourierdarstellung von } u(\underline{r}, t)$$

$$= -f(\underline{r}, t) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{u}(\underline{k}, \omega) \left( -k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow -\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \hat{u}(\underline{k}, \omega) = -\hat{f}(\underline{k}, \omega)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{u}(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{\underbrace{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)}_{\tilde{g}(\underline{k}, \omega)}} \tilde{f}(\underline{k}, \omega)}$$

unser Ansatz war

$$u(\underline{x}, t) = \int d^3x' \int dt' G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') f(\underline{x}', t')$$

Folgerung

$$\Rightarrow \tilde{g}(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \text{ ist die Fouriersumme der Green'schen Funktion.}$$

Rücktransformation

$$u(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{u}(\underline{k}, \omega) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t)}$$

Formel  
mit Rücktransf. von  $\tilde{f}(\underline{k}, \omega)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left( \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i(\underline{k}\cdot(\underline{x}-\underline{x}') - \omega(t-t'))}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right) \times f(\underline{x}', t')$$

Durch Vergleich mit unserem  
Faltungssatz folgt

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i(\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}') - \omega(t-t'))}}{k^2 \frac{\omega^2}{c^2}}$$

führe noch ein

$$\tilde{t} = t - t', \quad \underline{\tilde{r}} = \underline{r} - \underline{r}'$$

$$G(\underline{\tilde{r}}, \tilde{t}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\underline{k} \cdot \underline{\tilde{r}}} \Gamma(\underline{k}, \tilde{t})$$

mit  $\Gamma(\underline{k}, \tilde{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega \tilde{t}}}{k^2 \frac{\omega^2}{c^2}}$

Berechne zunächst  $\Gamma(\underline{k}, \tilde{t})$

Bemerkungen:

- Beachte Kausalitätsbedingung

$$G(\underline{\tilde{r}}, \tilde{t}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für} \quad \tilde{t} < 0 \\ (\underline{r}' > \underline{r})$$

$$\Rightarrow \Gamma(k, \tau) \stackrel{!}{=} 0$$

für  $\tau < 0$

"Zukunft"

- Der Nenner im Integrand von  $\Gamma(k, \omega)$  wird Null für  $\omega = \pm \omega_0$  mit  $\omega_0 = ck$

denn

$$\begin{aligned} k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} &= \left(k - \frac{\omega}{c}\right) \left(k + \frac{\omega}{c}\right) \\ &= \frac{1}{c^2} (kc - \omega)(kc + \omega) \\ &= \frac{1}{c^2} (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \\ &= \frac{1}{c^2} (\omega_0^2 - \omega^2) \end{aligned}$$

Strategie: Komplexe Integration von  $\Gamma(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$

Ersatz des Integral über reelle Frequenz durch Kurvenintegral in der komplexen Ebene

$$\omega \xrightarrow{\text{reell}} \tilde{\omega} = \omega + i\omega'$$

(Imaginär)

$$= Re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad R = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \longrightarrow \oint_{\text{Kurve}} d\tilde{\omega} f(\tilde{\omega})$$

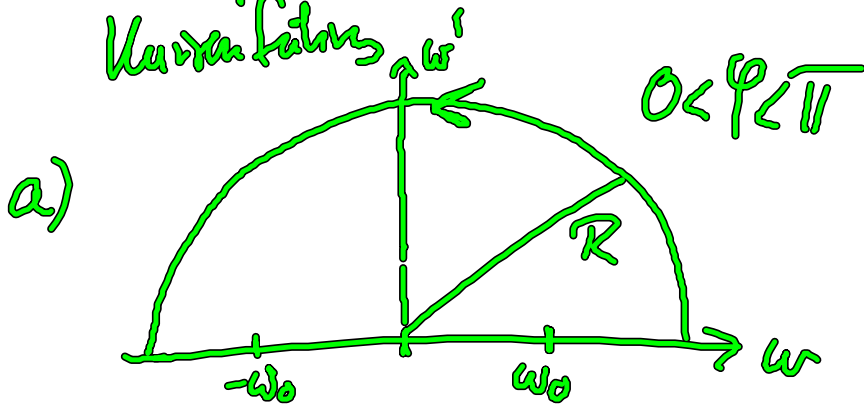
Beachte:

1) Beitrag vom Kurvenstück jenseits der reellen Achse muß verschwinden!

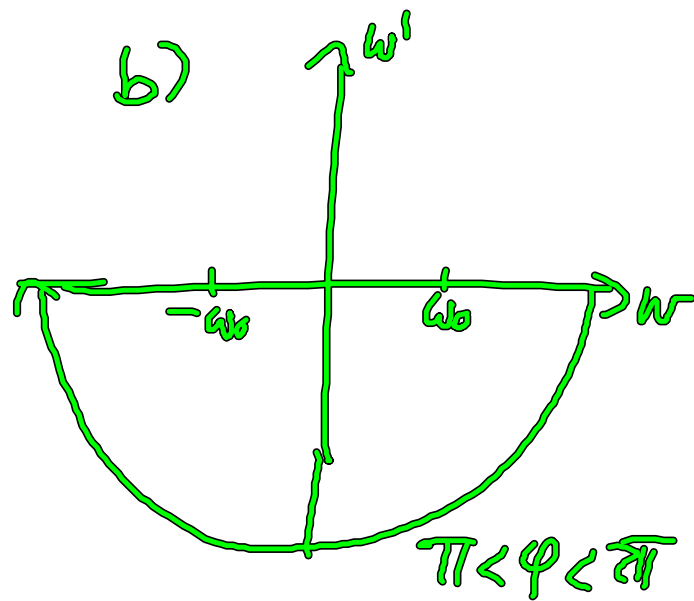
2) Integral muß verschwinden für  $\tilde{z} < 0$

Zu 1)

prinzipiell gibt es 2 Arten der Kurvenführung



Radius  $R \rightarrow \infty$



Der Integrand  $\frac{e^{-i\tilde{\omega}z}}{c^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$  muß auf dem Halb-Kreis verschwinden!



Setze  $\tilde{w} = w + i w'$

$$= R \cos \varphi + i R \sin \varphi$$

( $R \rightarrow \infty$  !)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-i w \tilde{w}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( e^{-i R \cos \varphi \tilde{w}} e^{R \sin \varphi \tilde{w}} \right) = 0$$

Fallunterscheidung

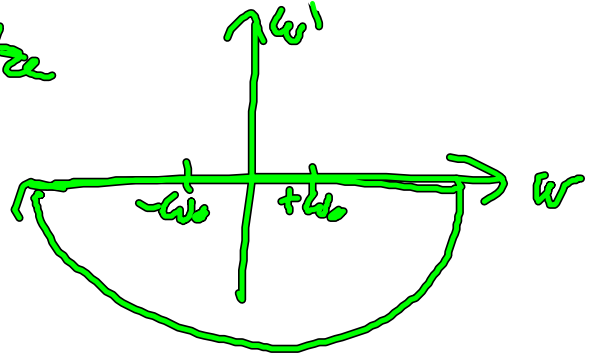
a)  $0 < \varphi < \pi \Rightarrow \sin \varphi > 0$   
Damit Integrand verschwindet, muss  $\tilde{w} < 0$  sein!

b)  $\pi < \varphi < 2\pi \Rightarrow \sin \varphi < 0$

$\Rightarrow$  ES muss  $\tilde{w} > 0$  !

Für  $\tilde{w} > 0$  bzw.  $\tilde{w} < 0$  muss man die keine b) bzw. a) nehmen!

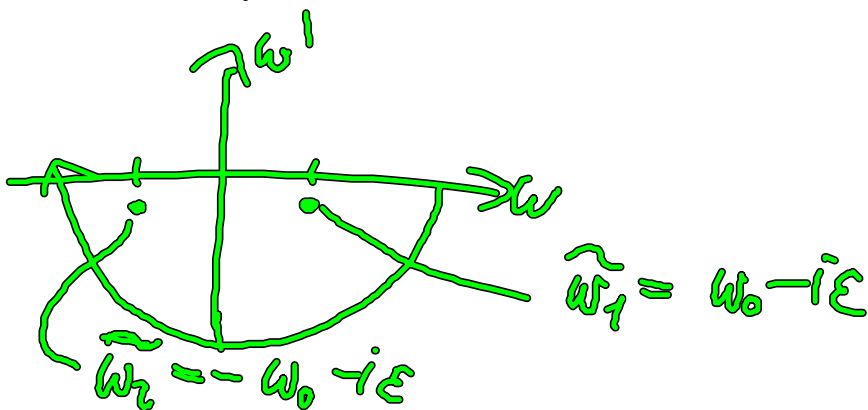
Für den hier interessanten Fall  $\tilde{\tau} > 0$  müsse  
 wir also Weg b) benutzen



~~Frage~~ Wie  $\eta$  verhält sich man bei  
 Weg b), dass das Integral für  $\tilde{\tau} < 0$   
~~ist~~ Null ergibt!

Hierfür:

→ Verschiebung der Pole um ein infinitesimales  $\epsilon$   
 ( $\epsilon > 0$ )  
 in die Halbebene



$$\Gamma(\underline{k}, \vec{\tau}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint d\vec{w} \frac{e^{-i\omega\vec{\tau}}}{\frac{1}{c^2}(\tilde{\omega}_1 - \tilde{w})(\tilde{\omega}_2 - \tilde{w})}$$

Betrachte  $\vec{\tau} < 0$



Kurve enthält keine Pole  
mehr !!

oder  $f(\vec{w}) = 0$ !  
Cauchy'scher Integralsatz!

Notwendig

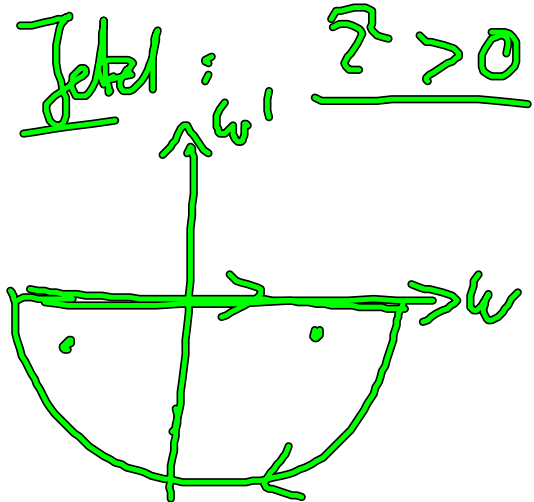
wahre Nullstelle $\frac{1}{c^2}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{1}{c^2}(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$
--

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{w}) = \omega_0 - \cancel{i\epsilon} - \omega - \cancel{i\epsilon} = (\omega_0 - \omega)$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} (\tilde{\omega}_2 - \tilde{w}) = -\omega_0 - \cancel{i\epsilon} - \omega - \cancel{i\epsilon} = -(\omega_0 + \omega)$$

Damit:  $\Gamma(\underline{k}, \vec{\tau} < 0) = 0$

wie gefordert  
 $\Rightarrow$  Erfüllung der Konsistenz!



Im Kurvengebiet ist  $f(\tilde{\omega}, \varepsilon)$   
analytisch bis auf die  
beiden Pole

bedh: Pole erste Ordnung

Anwendung des Residuensatzes

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = \sum_{\alpha=1}^n \operatorname{Res}_{z_{\alpha}} f(z)$$



Summation  
über Polstelle

Residuum eines Poles erster Ordnung

$$\operatorname{Res}_{z_{\alpha}} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_{\alpha}} [(z - z_{\alpha}) f(z)]$$

$$\text{hier } f(z) \rightarrow f(\tilde{\omega}, \varepsilon) = \frac{e^{-i\tilde{\omega}t}}{(-1)^{\frac{1}{2}} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega})(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega})}$$

$$\text{Res}_{\tilde{\omega}_1} f(\tilde{\omega}, \varepsilon) = \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}_1} \left[ \frac{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) e^{-i\tilde{\omega} \tau}}{\frac{1}{c^2} (-1) (\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}) (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega})} \right]$$

$$= \frac{e^{-i\tilde{\omega}_1 \tau}}{\frac{1}{c^2} (\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1)}$$

analog:  $\text{Res}_{\tilde{\omega}_2} f = \frac{e^{-i\tilde{\omega}_2 \tau}}{\frac{1}{c^2} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)}$

$$\Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} \dots$$

$$\Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ 2\pi i \left( \frac{e^{-i\tilde{\omega}_1 \tau}}{\frac{1}{c^2} (\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1)} + \frac{e^{-i\tilde{\omega}_2 \tau}}{\frac{1}{c^2} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)} \right) \right]$$

da Kurve nicht im positiven Sinne durchlaufen wird!

Erinnern:  $\tilde{\omega}_1 = \omega_0 - i\varepsilon$   
 $\tilde{\omega}_2 = -\omega_0 - i\varepsilon$  ( $\omega_0 = ck$ )

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = -2\pi i \left( \frac{e^{-i\omega_0 \tau}}{\frac{1}{c^2}(-\omega_0 \tau)} + \frac{e^{i\omega_0 \tau}}{\frac{1}{c^2}(+\omega_0 \tau)} \right)$$

$$\Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = 2\pi c^2 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0}$$

Green'sche Funktion, (für  $\tau > 0$ )

$$G(\underline{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \Gamma(\underline{k}, \tau)$$

$$= \frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \frac{\sin c\tau t}{k} \left. \begin{array}{l} \text{mit } \underline{x} = \underline{r} - \underline{r}' \\ \tau = t - t' \\ > 0 \end{array} \right\}$$

auswerten des  $\underline{k}$ -Integral

in Kugelkoordinat

$$\int d^3k \dots = \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta)$$

$k = |k|$

und  $\underline{k} \cdot \underline{s} = ks \cos \vartheta_k$

benutze  $\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta_k) e^{i \underline{k} \cdot \underline{s}} = \dots = \frac{2 \sin ks}{ks}$

$$\Rightarrow G(\underline{s}, \vec{r}) = \frac{c}{2\pi^2 s} \int_0^{\infty} dk \frac{\sin(kr)}{\sin(ks)}$$

$$s = |r - r'|$$

Substituiere noch:

$$x = ck$$

$$G(\underline{s}, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2 s} \int_0^{\infty} dx \sin(x\vec{r}) \sin\left(\frac{s}{c}x\right)$$

Schreibe die Sinusfunktion  
in Exponentialform um

und benutze  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iax} = \delta(a)$

→ Endergebnis

$$\begin{aligned} G(x, \vec{r}) &= G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \\ &= \frac{1}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} \left( \delta(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right. \\ &\quad \left. - \delta(t-t' + \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right) \end{aligned}$$

Beachte

die zweite  $\delta$ -Fkt. ergibt

Null für alle  $t-t' > 0$  !!



Damit

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$$

$$= \frac{1}{4\pi k \cdot r'} \delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)$$

Retardierte Green'sche Funktion