Wh: $\underline{j}(\underline{r},t)^{total}$

$$= \underset{\text{"frei"}}{\underline{j}(\underline{r},t)} + \underline{j}_{mag}(\underline{r},t) + \underline{j}_P(\underline{r},t)$$

Polarisationsladung

$\underline{j}_P = \dot{\underline{P}}$

Magnetisierungsbeitrag
stammt von mikroskop. magnet. Momenten im Material ($\Leftarrow$ Kreisströme)

permanente Moment! $\underline{m}_i$

Energie:

$W_i = -\underline{m}_i \cdot \underline{B}^{extern}$ $\Longrightarrow$ Ausrichtung der magnet. Momente?

Frage: Gesamtfeld im Material?

Betrachte zunächst stat. Feld ($\dot{\underline{P}} = 0 \Rightarrow \underline{j}_P = 0$)

$$\nabla \times \underline{B}^{ext}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}^{ext}(\underline{r})$$

im Material

$$\boxed{\underline{B} = \underline{B}^{ext} + \underbrace{\underline{B}^{mag}}_{\text{Zusatzfeld}}}$$

Ansatz: $\nabla \times \underline{B}^{mag} = \mu_0 \underline{j}_{mag}$

mit $\underline{j}_{mag} = \nabla \times \underline{M}$

makroskopische Magnetisierung

(Beachte Analogie:
$\underline{E} = \underline{E}^{ext} + \underline{E}_P$, $\nabla \cdot \underline{E}_P = \frac{\varrho_P}{\varepsilon_0}$ mit $\varrho_P = -\nabla \cdot \underline{P}$)

$\underline{M}$ ist Mittelwert über die mikroskop. Dipolmomente in einem Volumenelement ΔV

$$\underline{M}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V} \int d^3s \; \underline{M}_{mikro}(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{m}_i(t)\, \delta(\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}_i(t))$$

beachte: Die $\underline{m}_i$ fluktuieren immer auch zeitlich (thermische Bewegung!)
Der räumliche Mittelwert „glättet" die zeitl. Fluktuationen heraus!

Zusammensetzen der Gleichungen

$$\nabla \times \underline{B} = \nabla \times (\underline{B}^{ext} + \underline{B}^{mag})$$

$$= \nabla \times \underline{B}^{ext} + \mu_0 \underline{j}^{mag}$$

$$= \nabla \times \underline{B}^{ext} + \mu_0 \nabla \times \underline{M} = \mu_0 \underline{j}^{ext}$$

$$\rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M} \right) = \underline{j}^{ext}$$

nur externe (freie) Ströme tauchen auf

definiere jetzt:

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla \times \underline{H} = \underline{j}^{ext}}$$

auch dynamisch definiert wie

$$\underline{H}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r}, t) - \underline{M}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{j}_{mag}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{M}(\underline{r}, t)$$

VI.3. Maxwell-Gl. in Materie

Lorenz-Eichung:

$$\Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left(\rho(\underline{r}',t_{ret}) + \underbrace{\rho_P(\underline{r}',t_{ret})}_{-\nabla\cdot\underline{P}(\underline{r}',t_{ret})}\right)\cdot\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

t_{ret} retardierte Zeit

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left(\underline{j}(\underline{r}',t_{ret}) + \underbrace{\underline{j}_P(\dots)}_{\dot{\underline{P}}} + \underbrace{\underline{j}_{mag}}_{\nabla\times\underline{M}}\right)\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Box\underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0(\underline{j}+\underline{j}_P+\underline{j}_{mag})$$

$$\Box\Phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_P)$$

daraus die Felder:

$$\left.\begin{aligned}\underline{E} &= -\nabla\Phi - \dot{\underline{A}}\\ \underline{B} &= \nabla\times\underline{A}\end{aligned}\right\}$$

es folgt sofort:
$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t) &= -\dot{\underline{B}}\\ \nabla\cdot\underline{B}(\underline{r},t) &= 0\end{aligned}\right\}\text{ wie im Vakuum!}$$

$$\nabla\cdot\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\cdot\underline{A}}_{-\frac{1}{c^2}\dot{\phi}} - \Delta_{\underline{r}}\phi$$

Lorentzeichung

$$= -\Box\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_p) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla\cdot\underline{P})$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\big(\underbrace{\varepsilon_0\underline{E}(\underline{r},t) + \underline{P}(\underline{r},t)}_{\underline{D}(\underline{r},t)}\big) = \rho(\underline{r},t)}$$

$$\nabla\times\underline{B}(\underline{r},t)$$

$$= \nabla\times(\nabla\times\underline{A})$$

$$= \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\underline{A}}_{-\frac{1}{c^2}\dot{\phi}}) - \Delta\underline{A} = -\Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi}_{-\underline{E}-\dot{\underline{A}}}$$

$$= -\Box\underline{A} + \overbrace{\frac{1}{c^2}}^{\varepsilon_0\mu_0}\dot{\underline{E}}$$

$$= \mu_0 (\underline{j} + \underline{j}_p + \underline{j}_{mag}) + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\underline{E}}$$

$$= \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \dot{\underline{P}} + \mu_0 \nabla \times \underline{M} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r},t) - \underline{M}(\underline{r},t) \right)$$

$$= \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r},t) + \underline{P}(\underline{r},t) \right)$$

$$\boxed{\nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r},t)} \quad !!$$

<u>Bemerkung</u>:

Alle Gl. sehen also aus wie im Vakuum, aber $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$, $\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$

$\Rightarrow$ man muß die Maxwell-Gl. durch zusätzl. <u>Materialgleichungen</u> ergänzen

Zusammenhänge

zu. $\underline{P} \Leftrightarrow \underline{E}$

$\underline{M} \Leftrightarrow \underline{H}$

Wie sehen solche Materialgleichungen aus?

Im allereinfachsten Fall:

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r},t)$$
$$\underline{M}(\underline{r},t) = \chi_m \underline{H}(\underline{r},t)$$

man nennt dann

χ_e : "elektrische Suszeptibilität"

χ_m : " magnet. " "

Im einfachsten Fall sind dies Materialkonstanten!

Berechnung durch mikroskop. Theorie – Quantentheorie, Statist. Physik

Folgerung:

- $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underbrace{\underline{P}}_{= \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}}$

$= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E}(\underline{r}, t)$

$= \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}$

mit $\boxed{\varepsilon = 1 + \chi_e}$ relative Dielektrizitätskonstante

Vakuum: $\chi_e = 0$

$\varepsilon = 1$

- $\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$
$= \mu_0 (1 + \chi_M) \underline{H} =: \mu_0 \mu \underline{H}$ mit $\boxed{\mu = 1 + \chi_m}$ relative Permeabilität

Bemerkungen zur Gültigkeit des Ansatzes

$\underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}, \quad \underline{M} = \chi_m \underline{H}$

- Linearer Zusammenhang!

nur gültig, falls die Felder nicht zu stark sind! Für starke Felder müssen nichtlineare Effekte berücksichtigt werden

z.B. $\underline{P} = \varepsilon_0 \left(\chi_e \underline{E} + \chi_e^{(3)} (\underline{E})^3 + \dots \right)$

keine gerade Potenz in $\underline{E}$ wg. Symmetrie!

• ~~Skalar~~

• Skalarer Zusammenhang

gilt nur für isotrope Materialien, in denen keine Raumrichtung ausgezeichnet ist!
(insbes. Flüssigkeiten, Gase)

Für (anisotrope!) Kristalle oder auch für Flüssigkristalle gilt:

$$\underline{P} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi}}_e \underline{E}$$

Tensor!

• Instantaner und lokaler Zusammenhang!

instantan: nur gültig, falls Felder schwach veränderlich!
(zeitl.)

lokal: nur falls Feld schwach räuml. veränderlich!

Andernfalls:

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \chi_e(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \underline{E}(\underline{r}',t')$$

"räumliche und zeitliche Dispersion"

beachte: χ_e muß kausal sein, d.h. $\chi_e = 0$ für $t' > t$

~~falls $\chi_e(\ldots)$ wirklich~~

beachte: Der angegebene Ausdruck ist ein Faltungsintegral

$\Rightarrow$ faktorisiert im Fourierraum!

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\underline{P}}(\underline{k},\omega) = \varepsilon_0\, \tilde{\chi}_e(\underline{k},\omega)\, \underline{E}(\underline{k},\omega)}$$

Fourier-Transformierte

Obige Zusammenhänge sind typisch für die sogenannte "Lineare-Antwort"- oder Linear-Response-Theorie

hier: $\underline{E}$ "Störung"

$\underline{P}$ "Antwort"

VI.4. Mikroskop. Modelle der Polarisierbarkeit

Ziel: Berechnung der Konstante χ_e für ein homogenes, isotropes, lineares Medium
$$\underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

Betrachte den Fall, dass nur Dipole induziert werden

Nähe — Verknüpft induzierte Dipole im Atom

Klass. Atommodell

- Punktförmiger Kern mit Ladung

  $Q_K = Z|e_0| > 0$ — Kernladungszahl

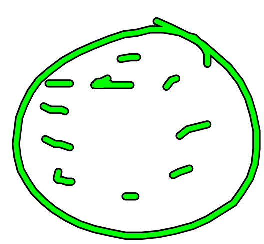
  am Ort $\underline{r}_K$

- homogen verteilte Elektronenladung

  $Q_e = -Z|e_0| < 0$

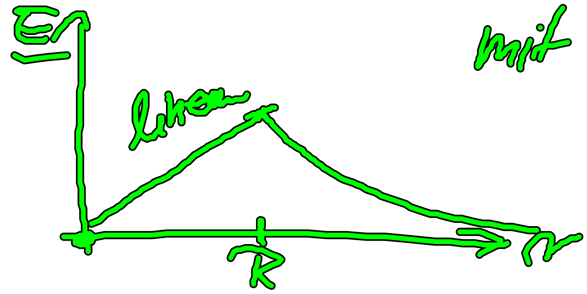
Betrachte elektr. Feld, das durch die Elektronen im Atom erzeugt wird

(entspricht Feld in einer homogen geladenen Kugel!)



$$\underline{E}_e(\underline{r}) = \frac{Q e_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}-\underline{r}_e}{R^3}$$

$\underline{r}_e$: Schwerpunkt der Elektronenladung mit R Atomradius



$\Rightarrow$ Kraft auf den Kern

$$\underline{F}_K = Q_K \, \underline{E}_e(\underline{r}_K)$$

$$= \frac{-Z^2 e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\underline{r}_K - \underline{r}_e)$$

ist dann ungleich Null, falls die Schwerpunkt der Ladung gegeneinander verschoben sind!

analog: $\underline{F}_e = -\underline{F}_K$

Bewegungsgleichungen für $\underline{r}_K$ und $\underline{r}_e$ in Anwesenheit eines äußeren Feldes $\underline{E}^{ext}$

Newton:

$$m_K \ddot{\underline{r}}_K = \underline{F}_K + Q_K \underline{E}^{ext}$$

$$= -\frac{Z^2 e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\underline{r}_K - \underline{r}_e) + Z e_0 \underline{E}^{ext}$$

$$Z m_e \ddot{\underline{r}}_e = \underline{F}_e + Q_e \underline{E}^{ext} = \frac{Z^2 e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\underline{r}_K - \underline{r}_e) - Z e_0 \underline{E}^{ext}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}}_K - \ddot{\underline{r}}_e$$

$$= -\frac{Z^2 e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e}\right)(\underline{r}_K - \underline{r}_e)$$

$$+ Z e_0 \left(\frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e}\right)\underline{E}^{ext}$$

Führe $\underline{r} = \underline{r}_K - \underline{r}_e$

benutze $m_K \gg Z m_e \Rightarrow \frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e} \approx \frac{1}{Z m_e}$

$$\ddot{\underline{r}} \approx -\frac{Z^2 e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{1}{Z m_e}\underline{r} + \frac{Z e_0}{Z m_e}\underline{E}^{ext}$$

Schwingungsfrequenz

definiere: $\omega_0^2 = \dfrac{Z e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\underline{r}} + \omega_0^2\,\underline{r} = \frac{e_0}{m_e}\underline{E}^{ext}}$$

klass. Bewegungsgl. eines harmonischen Oszillators!