

ϵ_1

ϵ_2

$\mu_1 = \mu_2 = 1$

einfallende Well:

$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

$i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$

$\underline{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$

refl.

$\underline{E}' = \underline{E}_0' e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t)}$

x-z Ebene Einfallsebene

transmittiert.

\underline{k}'' , ω''

Dispersionsrelation:

$\omega = \frac{c}{n_1} k$

$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$

$\omega' = \frac{c}{n_1} k'$

$\omega'' = \frac{c}{n_2} k''$

$e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t)} \Big|_{z=0}$

$= e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t)} \Big|_{z=0}$

$= e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t)} \Big|_{z=0}$

$\Rightarrow \omega = \omega' = \omega''$

und $k = k'$
 $k'' \neq k, k'$

es muß gelten:

$$\textcircled{*} \quad (\underline{k} \cdot \underline{n})_{z=0} = (\underline{k}' \cdot \underline{n})_{z=0} = (\underline{k}'' \cdot \underline{n})_{z=0} \quad \forall \underline{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~Die~~
 \underline{k} liegt in der x - z -Ebene, Annahme: Die durch \underline{k}' und \underline{n} bzw. \underline{k}'' und \underline{n} gebildeten Ebenen schließen einen Winkel φ mit der x - z -Ebene ein!

$$\underline{k} = \sin \gamma \underline{e}_x + \cos \gamma \underline{e}_z$$

$$\underline{k}' = \sin \gamma' \cos \varphi' \underline{e}_x + \sin \gamma' \sin \varphi' \underline{e}_y + \cos \gamma' \underline{e}_z$$

$$\underline{k}'' = \sin \gamma'' \cos \varphi'' \underline{e}_x + \sin \gamma'' \sin \varphi'' \underline{e}_y + \cos \gamma'' \underline{e}_z$$

aus $\textcircled{*}$ $k_x = k_x' = k_x''$ $\textcircled{1}$

$k_y = k_y' = k_y''$ $\textcircled{2}$

aus $\textcircled{2}$: $\sin \gamma' \sin \varphi' = \sin \gamma'' \sin \varphi'' = 0$ $\stackrel{= k_y}{=}$

nehme an: $\gamma', \gamma'' \neq 0$

\Rightarrow kann nur erfüllt werden mit $\varphi = \varphi'' = 0$
 $\Rightarrow k_y' = k_y'' = 0$

außerdem Reflexionsgesetz:
 $\sin \gamma = \sin \gamma'$

Snellius'sches Brechungsgesetz: $\frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} = \frac{k'}{k''} = \frac{n_1}{n_2}$
 $\Leftrightarrow \frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma} = \frac{n_1}{n_2}$

Amplituden?

Man diskutiert 2 Spezialfälle

a) Einfallende Welle ist linear polarisiert

\perp zur Einfallsebene: $\underline{E}_0 = E_{0y} \underline{e}_y$

b) linear polarisiert in der Einfallsebene

Fall a) $\underline{E}_0 = E_{0y} \underline{e}_y$

Welche Richtungen haben dann \underline{E}_0' und \underline{E}_0'' ?

benutze Stetigkeitsbedingung

$$\textcircled{1} \quad E_{0,y} + E_{0,y}' - E_{0,y}'' = 0$$

Tangentalkomponente
von \underline{E} ist stetig

$$\Rightarrow E_{0,y} = E_{0,y}'' - E_{0,y}'$$

soll ungleich Null sein!

$$\textcircled{2} \quad \cancel{D_{0,z}} + D_{0,z}' - D_{0,z}'' = 0$$

Normalkomponente
von \underline{D} stetig!

$$\Rightarrow \epsilon_1 E_{0,z}' = \epsilon_2 E_{0,z}'' \quad \text{homogen, isotropes Medium!}$$

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$$

\Rightarrow für $E_{0,z}' \neq 0$ ist offensichtlich

$$\epsilon_1 \neq 0$$

$$\epsilon_2 \neq 0$$

auch $E_{0,z}'' \neq 0$

andere Seite: Die Amplituden muß senkrecht zu den Wellenvektoren \underline{k}' , \underline{k}'' stehen, diese liegen in der $x-z$ -Ebene!

$$E_{0,y}' = 0, \quad E_{0,y}'' = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Das würde im} \\ \text{Widerspruch zu } \textcircled{1}! \end{array} \right.$$

Daraus sieht man: $E_{0,z}' (D_{0,z}')$

und $E_{0,z}'' (D_{0,z}'')$

müssen Null sein!

$$\rightarrow \underline{E}_0' = E_{0,y}' \hat{y}, \quad \underline{E}_0'' = E_{0,y}'' \hat{y}$$

reflektiert

transmittiert

Um die Amplitudenverhältnisse zu berechnen,
benutzen wir die Stetigkeitsbedingungen für
das \underline{B} -Feld (Tangentialkomponente)

$$B_{0,x} + B'_{0,x} - B''_{0,x} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{benutze} \\ \underline{B}_0 = \frac{c}{\omega} (\underline{k} \times \underline{E}_0) \end{array} \right)$$

$$\frac{c}{\omega} (E_{0,y} k_z + E'_{0,y} k'_z - E''_{0,y} k''_z) = 0$$

benutze $k'_z = -k_z$ (Reflexionsgesetz)

$$k_z (E_{0,y} - E'_{0,y}) - E''_{0,y} k''_z = 0 \quad (**)$$

Kombiniere das mit (*) $E_{0,y} + E'_{0,y} - E''_{0,y} = 0$

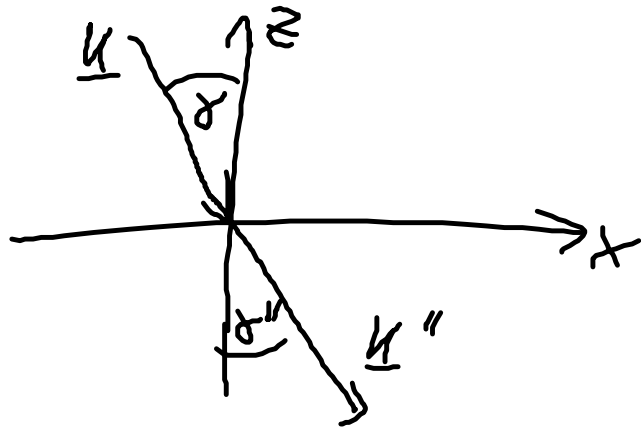
Wir erhalten (nach Zwischenschritten)

$$\frac{E'_{0,y}}{E_{0,y}} = \frac{k_z - k''_z}{k_z + k''_z} ; \quad \frac{E''_{0,y}}{E_{0,y}} = \frac{2k_z}{k_z + k''_z}$$

Amplitudenverhältnisse!

Drücke k_z'' , k_z durch die Winkel δ , δ'' aus

$$\begin{aligned} k_z'' &= k'' \cos \delta'' \\ &= k \frac{n_2}{n_1} \cos \delta'' \\ &= k \frac{\sin \delta}{\sin \delta''} \cos \delta'' \end{aligned}$$



Snellius
 $k_z = k \cos \delta$

Es ergibt sich (nach einigen Schritten)

$$\frac{E_{0,y}'}{E_{0,y}} = \frac{\sin(\delta'' - \delta)}{\sin(\delta'' + \delta)} \quad ; \quad \frac{E_{0,y}''}{E_{0,y}} = \frac{2 \sin \delta'' \cos \delta}{\sin(\delta'' + \delta)}$$

Fresnel'sche Formeln für die Brechung von Licht, das \perp zur Einfallsebene polarisiert ist!

\Rightarrow Intensitätsverhältnisse \Rightarrow Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$$R_{\perp} := \left| \frac{E_{0,y}'}{E_{0,y}} \right|^2 = \frac{\sin^2(\delta'' - \delta)}{\sin^2(\delta'' + \delta)} \quad \text{Reflexion}$$

$$T_{\perp} := \left| \frac{E_{0,y}''}{E_{0,y}} \right|^2 = \frac{4 \sin^2 \delta'' \cos^2 \delta}{\sin^2(\delta'' + \delta)} \quad \text{Transmission}$$

es gilt: $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$

Beachte Bezug zum Poyntingvektor

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} (\underline{E} \times (\underline{k} \times \underline{E}))$$

$$= \frac{1}{\omega \mu_0} (\underline{k} \cdot (\underline{E})) \underline{E} - \underline{E} (\underline{k} \cdot \underline{E}) = \frac{1}{\omega \mu_0} (\underline{E}) \underline{k}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{k} \times \underline{E}$$

$$\underline{k} \times \underline{E} = \omega \underline{B}$$

$$= \omega \mu_0 \underline{H}$$

Fall b) Einfallende Welle ist linear polarisiert
in der Einfallsebene

Ergebnis: $\frac{E_{\parallel}'}{E_{\parallel}} = \frac{\tan(\gamma - \gamma'')}{\tan(\gamma + \gamma'')} ; \frac{E_{\parallel}''}{E_{\parallel}} = \frac{2 \sin \gamma'' \cos \gamma}{\sin(\gamma + \gamma'') \cos(\gamma - \gamma')}$

E_{\parallel}' , E_{\parallel}'' : Feldkomponenten der reflektierten bzw. transmittierten Welle parallel zur Einfallsebene!

Folgerungen aus den Fresnel'schen Formeln

i) $n_1 = n_2 \xrightarrow{\text{Snellius}} \gamma'' = \gamma \Rightarrow R=0$
 $T=1$

unabhängig von der Polarisation!

also keine Reflexion!

(i) Brewster'scher Winkel

betrachte in der Einfallsebene polarisiert Licht

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_{\parallel}' \\ E_{\parallel} \end{array} = \frac{\tan(\gamma - \gamma'')}{\tan(\gamma + \gamma'')} \right.$$

$$\text{sei } \gamma + \gamma'' = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\Rightarrow E_{\parallel}' = 0 \quad (\text{und damit } R_{\parallel} = 0) \\ \text{keine Reflexion!}$$

Im allgemeinen Fall (einfallende ist elliptisch polarisiert, d.h. \underline{E}_0 hat sowohl Komponente in und senkrecht zur Einfallsebene!

\Rightarrow Dann gibt es eine reflektierte Welle, diese ist aber vollständig \perp zur Einfallsebene polarisiert!

also Drehung der Polarisationsrichtung im Vergleich ~~senkrecht~~ zur einfallenden Welle

Definition des Brewster-Winkels.

$$\gamma + \gamma'' = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma'' \Leftrightarrow \cos \gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma''\right) \quad (*) = \sin \gamma''$$

aus Snellius:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma} \stackrel{(*)}{=} \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \cot \gamma = \cot \gamma_B$$

$$\Rightarrow \tan \gamma_B = \frac{1}{\cot \gamma_B} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

iii) Totalreflexion

Kann auftreten, wenn die Welle von einem "optisch dichteren" in ein "optisch dünneres" Medium eintritt

$$n_1 > n_2 \longrightarrow \gamma'' > \gamma \quad (\text{aus Snellius})$$

Im Prinzip kann der Ausfallwinkel γ'' auf 90° anwachsen!

Welle dringt nicht mehr in das Medium 2 ein (Kein transmittierter Energiestrom)

Sondern sie läuft parallel zur Grenzfläche!

"Grenzwinkel" zur Totalreflexion

$$\gamma'' = \frac{\pi}{2} \quad (\sin \gamma'' = 1 !)$$

Snellius

$$\frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sin \gamma} =: \frac{1}{\sin \gamma_G} \quad (*)$$

$$\sin \gamma_G = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

$\gamma < \gamma_G$: normales Verhalten
 $\gamma > \gamma_G$: ??? Was passiert hier?

aus (*) folgt:

$$\sin \gamma'' = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_G}$$

$$\cos \gamma'' = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma''} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_G}\right)^2}$$

beachte $k_z'' = (\underline{k}'')_z = k'' \cos \gamma''$

Für $\gamma > \gamma_G$ ($\Leftrightarrow \sin \gamma / \sin \gamma_G > 1$)

wird $\cos \gamma''$ und damit k_z'' rein imaginär!

Folgerung für Felder und Erroschlupf in Medium 2

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\underline{k}'' = \begin{pmatrix} k_x'' \\ 0 \\ k_z'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{i k_x'' x} e^{i k_z'' \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0'}\right)^2} z} e^{-i \omega t}$$