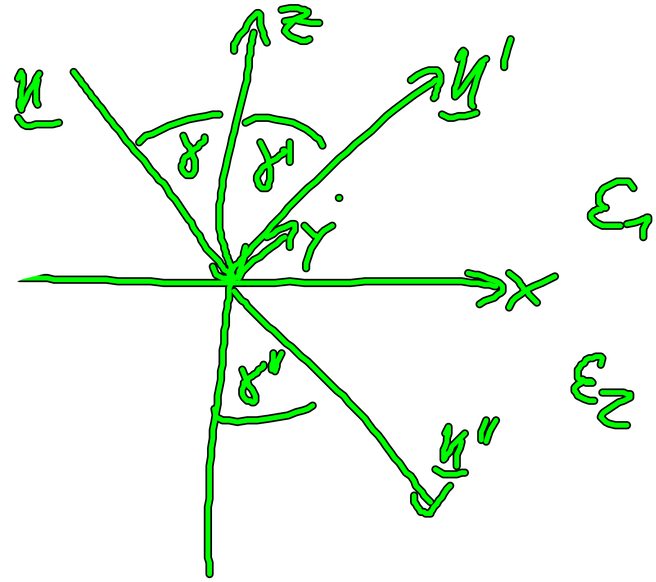


$\mu_1 = \mu_2 = 1$

einfallende Well: $\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$ $\quad \underline{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$

refl. $\underline{E}' = \underline{E}_0' \, e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega' t)}$

x-z-Ebene Einfallsebene

transmittiert. $\underline{k}''$, ω''

Dispersionsrelation: $\omega = \frac{c}{n_1} k$ ($|\underline{k}|$) $\quad n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$

$\omega' = \frac{c}{n_1} k'$

$\omega'' = \frac{c}{n_2} k''$

$$e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}\Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega' t)}\Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega'' t)}\Big|_{z=0}$$

$\Rightarrow \omega = \omega' = \omega''$ und $k = k'$

$k'' \neq k, k'$

es muß gelten:

$$(\underline{k}\cdot\underline{r})_{z=0} = (\underline{k}'\cdot\underline{r})_{z=0} = (\underline{k}''\cdot\underline{r})_{z=0} \quad \forall\, \underline{r} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \qquad (*)$$

~~...~~

$\underline{k}$ liegt in der x-z-Ebene, Annahme: Die durch $\underline{k}'$ und $\underline{n}$ bzw. $\underline{k}''$ und $\underline{n}$ gebildeten Ebenen schließen einen Winkel φ mit der x-z-Ebene ein!

$\underline{n} = \underline{e}_z$

$$\underline{k} = \sin\gamma\, \underline{e}_x + \cos\gamma\, \underline{e}_z$$

$$\underline{k}' = \sin\gamma' \cos\varphi'\, \underline{e}_x + \sin\gamma' \sin\varphi'\, \underline{e}_y - \cos\gamma'\, \underline{e}_z$$

$$\underline{k}'' = \sin\gamma'' \cos\varphi''\, \underline{e}_x + \sin\gamma'' \sin\varphi''\, \underline{e}_y + \cos\gamma''\, \underline{e}_z$$

aus $(*)$: $\quad k_x = k_x' = k_x'' \quad (1)$

$\underset{=0}{k_y} = k_y' = k_y'' \quad (2)$

aus (2): $\sin\gamma' \sin\varphi' = \sin\gamma'' \sin\varphi'' = \overset{k_y}{0}$

nehme an: $\gamma', \gamma'' \neq 0$

$\Rightarrow$ kann nur erfüllt werden mit $\varphi' = \varphi'' = 0$

$\Rightarrow k_y' = k_y'' = 0$

außerdem Reflexionsgesetz:

$$\sin\gamma = \sin\gamma'$$

Snellius'sches Brechungsgesetz: $\dfrac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'} = \dfrac{k'}{k''} = \dfrac{n_1}{n_2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} = \frac{n_1}{n_2}$$

Amplituden?

Man diskutiert 2 Spezialfälle

a) Einfallende Welle ist linear polarisiert $\perp$ zur Einfallsebene: $\underline{E}_0 = E_{0y}\,\underline{e}_y$

b) linear polarisiert in der Einfallsebene

Fall a)

$$\underline{E}_0 = E_{0,y}\,\underline{e}_y$$

Welche Richtungen haben dann $\underline{E}_0'$ ~~[illegible]~~ und $\underline{E}_0''$?

benutze Stetigkeitsbedingung

(1) $E_{0,y} + E'_{0,y} - E''_{0,y} = 0$

Tangentialkomponente von $\underline{E}$ ist stetig

$\Rightarrow E_{0,y} = E''_{0,y} - E'_{0,y}$

soll ungleich Null sein!

(2) $\cancel{D_{0,z}}^{=0} + D'_{0,z} - D''_{0,z} = 0$

Normalkomponente von $\underline{D}$ stetig!

$\Rightarrow \varepsilon_1 E'_{0,z} = \varepsilon_2 E''_{0,z}$ homogenes, isotropes Medium! $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$

$\Rightarrow$ für $E'_{0,z} \neq 0$ ist offensichtlich auch $E''_{0,z} \neq 0$

$\varepsilon_1 \neq 0$
$\varepsilon_2 \neq 0$

andererseits: Die Amplituden muß senkrecht zu den Wellenvektoren $\underline{k}'$, $\underline{k}''$ stehen, diese liegen in der x-z-Ebene!

$E'_{0,y} = 0$, $E''_{0,y} = 0$ | Das stünde im Widerspruch zu (1)!

Daraus sieht man: $E'_{0,z}$ ($D'_{0,z}$)

und $E''_{0,z}$ ($D''_{0,z}$)

müssen Null sein!

$\Rightarrow \underbrace{\underline{E}_0' = E'_{0,y}\,\hat{e}_y}_{\text{reflektiert}}$, $\underbrace{\underline{E}_0'' = E''_{0,y}\,\hat{e}_y}_{\text{transmittiert}}$

Um die Amplitudenverhältnisse zu berechnen, benutzen wir die Stetigkeitsbedingungen für das $\underline{B}$-Feld (Tangentialkomponente)

(benutze $\underline{B_0} = \frac{c}{\omega}(\underline{k} \times \underline{E_0})$)

$$B_{0,x} + B'_{0,x} - B''_{0x} = 0$$

$$\frac{c}{\omega}\left(E_{0y}k_z + E'_{0y}k_z' - E''_{0y}k_z''\right) = 0$$

benutze $k_z' = -k_z$ (Reflexionsgesetz)

$$\boxed{k_z\left(E_{0,y} - E'_{0y}\right) - E''_{0y}k_z'' = 0} \quad (**)$$

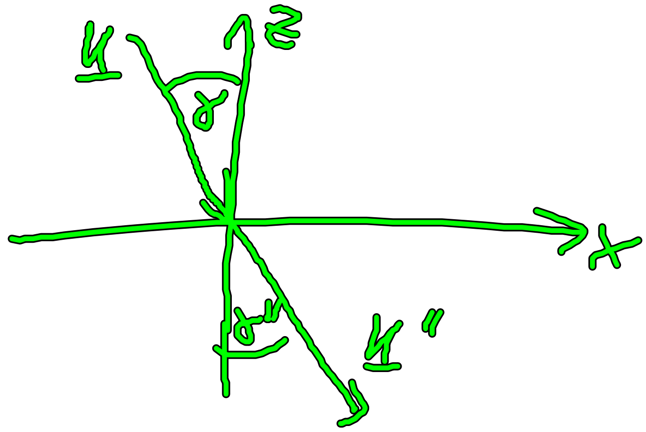
Kombiniere das mit (*) $\boxed{E_{0,y} + E'_{0,y} - E''_{0y} = 0}$

Wir erhalten (nach Zwischenschritten)

$$\cancel{k_z}\ \frac{E'_{0,y}}{E_{0,y}} = \frac{k_z - k_z''}{k_z + k_z''} \; ; \quad \frac{E''_{0y}}{E_{0y}} = \frac{2k_z}{k_z + k_z''}$$

Amplitudenverhältnisse!

Drücke k_z'', k_z durch die Winkel γ, γ'' aus



$$k_z'' = k'' \cos\gamma''$$

$$= k \frac{n_2}{n_1} \cos\gamma''$$

$$= k \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma''} \cos\gamma''$$

Snellius

$$k_z = k \cos\gamma$$

Es ergibt sich (nach einigen Schritten)

$$\boxed{\frac{E_{0,y}'}{E_{0,y}} = \frac{\sin(\gamma''-\gamma)}{\sin(\gamma''+\gamma)} \; ; \; \frac{E_{0y}''}{E_{0y}} = \frac{2\sin\gamma''\cos\gamma}{\sin(\gamma''+\gamma)}}$$

Fresnel'schen Formeln für die Brechung von Licht, das $\perp$ zur Einfallsebene polarisiert ist!

$\Rightarrow$ Intensitätsverhältnisse $\Rightarrow$ Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$$R_\perp := \left|\frac{E_{0y}'}{E_{0y}}\right|^2 = \frac{\sin^2(\gamma''-\gamma)}{\sin^2(\gamma''+\gamma)} \quad \text{Reflexion}$$

$$T_\perp := \left|\frac{E_{0y}''}{E_{0y}}\right|^2 = \frac{4\sin^2\gamma''\cos^2\gamma}{\sin^2(\gamma''+\gamma)} \quad \text{Transmission}$$

es gilt: $R_\perp + T_\perp = 1$

Beachte Bezug zum Poyntingvektor

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\left(\underline{E} \times (\underline{k} \times \underline{E})\right)$$

$$= \frac{1}{\omega\mu_0}\left(\underline{k}\cdot(\underline{E})^2 - \underline{E}(\underbrace{\underline{k}\cdot\underline{E}}_{0})\right) = \frac{1}{\omega\mu_0}(\underline{E})^2\,\underline{k}$$

$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}$

$\underline{k} \times \underline{E} = \omega \underline{B}$

$= \omega\mu_0 \underline{H}$

Fall b) Einfallende Welle ist linear polarisiert <u>in</u> der Einfallsebene

Ergebnis: $\frac{E_{\parallel}'}{E_{\parallel}} = \frac{\tan(\gamma - \gamma'')}{\tan(\gamma + \gamma'')}$; $\frac{E_{\parallel}''}{E_{\parallel}} = \frac{2\sin\gamma''\cos\gamma}{\sin(\gamma+\gamma'')\cos(\gamma-\gamma'')}$

$E_{\parallel}', E_{\parallel}''$: Feldkomponenten der reflektierten bzw. transmittierten Welle parallel zur Einfallsebene!

Folgerungen aus den Fresnel'schen Formeln

i) $n_1 = n_2 \xrightarrow[\text{Snellius}]{} \gamma'' = \gamma \Rightarrow R = 0$, $T = 1$

unabhängig von der Polarisation!

also keine Reflexion!

ii) Brewster'scher Winkel

betrachte in der Einfallsebene polarisierte Welle

$$\Rightarrow \boxed{\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\tan(\gamma - \gamma'')}{\tan(\gamma + \gamma'')}}$$

sei $\gamma + \gamma'' = \frac{\pi}{2}$, $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$

$$\Rightarrow E'_{\parallel} = 0$$ (und damit $R_{\parallel} = 0$)
keine Reflexion!

Im allgemeinen Fall (einfallende ist elliptisch polarisiert, d.h. $\underline{E}_0$ hat sowohl Komponente in und senkrecht zur Einfallsebene!

$\Rightarrow$ Dann gibt es eine reflektierte Welle, diese ist aber vollständig $\perp$ zur Einfallsebene polarisiert!

also Drehung der Polarisationsrichtung ~~[illegible]~~ im Vergleich zur einfallenden Welle

Definition des Brewster-Winkels

$$\gamma + \gamma'' = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma'' \Leftrightarrow \cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma''\right)$$

$$(*) \quad = \sin\gamma''$$

aus Snellius:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} \overset{(*)}{=} \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \cot\gamma$$

$$= \cot\gamma_B$$

$$\Rightarrow \tan\gamma_B = \frac{1}{\cot\gamma_B} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

iii) Totalreflexion

Kann auftreten, wenn die Welle von einem "optisch dichteren" in ein "optisch dünneres" Medium eintritt

$$n_1 > n_2 \longrightarrow \gamma'' > \gamma \quad \text{(aus Snellius)}$$

Im Prinzip kann der Ausfallwinkel γ'' auf 90° anwachsen!

Welle dringt nicht mehr in das Medium 2 ein (kein transmittierter Energiestrom)

sondern sie läuft parallel zur Grenzfläche!

"Grenzwinkel" zur Totalreflexion

$$\gamma'' = \frac{\pi}{2} \quad (\sin\gamma'' = 1 \ !)$$

Snellius: $$\boxed{\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sin\gamma} =: \frac{1}{\sin\gamma_G}} \quad (*)$$

$$\sin\gamma_G = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$\gamma < \gamma_G$: normales Verhalten

$\gamma > \gamma_G$??? Was passiert hier?

...

aus (*) folgt:

$$\sin\gamma'' = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}$$

$$\cos\gamma'' = \sqrt{1-\sin^2\gamma''} = \sqrt{1-\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2}$$

beachte $k_z'' = (\underline{k}'')_z = k''\cos\gamma''$

Für $\gamma > \gamma_G$ ($\Leftrightarrow \sin\gamma / \sin\gamma_G > 1$)

<u>wird $\cos\gamma''$ und damit k_z''</u> <u>rein imaginär</u>!

Folgerung für Felder und Energiefluss in Medium 2

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\underline{k}'' = \begin{pmatrix} k_x'' \\ 0 \\ k_z'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{E}'' = \underline{E}_0'' \, e^{i k_x'' x} \, e^{\underbrace{i k'' \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_c}\right)^2}}_{k_z} z} \, e^{-i\omega t}$$