VII Spezielle Relativitätstheorie

Motivation: elektromagnetischen Phänomene gekennzeichnet durch sehr hohe Geschwindigkeiten $v \lesssim c$

Grundfrage: Ändert sich etwas an Maxwell-Gleichungen? physikalischen Zusammenhängen?

Mechanik experimentell: für $v \lesssim c$ müssen Gesetze modifiziert werden

("klassische Mechanik" aus Theo I gilt nur für $v \ll c$!)

Elektrodynamik?

Wir werden sehen, dass sich die Maxwell-Gleichungen nicht ändern

→ MWG sind forminvariant unter Lorentz-Transformationen

VII. 1. Inertialsysteme, Galilei-Transformationen

(Erinnerung: Mechanik)

→ Inertialsystem: ausgezeichnetes Koordinatensystem: gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander

Newton'sches Trägheitsgesetz:

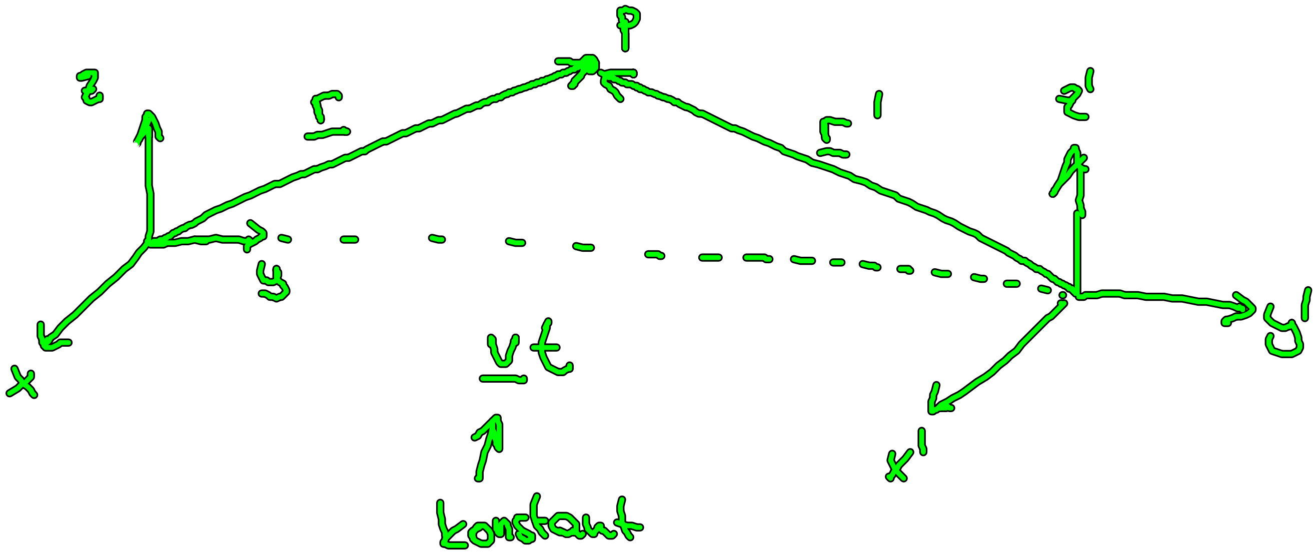
$$\underline{F} = m\underline{a} = m\underline{\ddot{r}}$$

Beachte: obige Definition impliziert, dass beschleunigte oder rotierende Systeme keine Inertialsysteme sind

↓

Scheinkräfte: Coriolis-, Zentrifugal-

Übergang zwischen 2 Inertialsystemen Σ, Σ'



bei $t=0$ $\Sigma = \Sigma'$.

$$\boxed{\underline{r} = \underline{r}' + \underline{v}\,t} \quad (*)$$ Galilei-Transformation

Bemerkungen:

a) Folgerung aus (*)

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}' + \underline{v}$$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}'$$

$$\Rightarrow \underline{F} = m\ddot{\underline{r}} = m\ddot{\underline{r}}' = \underline{F}'$$

Newton'sches Trägheitsgesetz gilt in <u>beiden</u> Systemen

b) Die Zeit wird bei Galilei-Transformationen nicht variiert
Die Zeit ist "absolut" in klassischer Mechanik.

Frage: Was bedeutet Galilei-Trafo für elektromagnetische Vorgänge (Lichtausbreitung)

Annahme: Im Ursprung Σ gibt es eine Lichtquelle, die sphärische Wellen emittiert (Kugelwellen)

Einschub: Kugelwellen

genau so wie ebene Wellen Lösung der Maxwell-Gleichungen

$$\underline{E}(\underline{r}) = E_0 \cdot \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \cdot \underline{\hat{e}}_r$$

$k = |\underline{k}|$, $r = |\underline{r}|$

radialer Einheitsvektor

Ausbreitungsgeschwindigkeit

betrachte konstante Phase $\quad kr - \omega t = \text{const.}$

$$r = \frac{\omega}{k} t + \text{const.}$$

$$\dot{r} = \frac{\omega}{k} = c$$

Falls außerdem $t=0$ bei $r=0 \Rightarrow \text{const.} = 0$

$r = ct$

---

für die Kugelwelle in Σ gilt $\quad r = ct$

$$\dot{r} = c$$

$$\underline{\dot{r}} = c\,\underline{\hat{e}}_r$$

mit $\underline{\hat{e}}_r = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

für einen Beobachter in Σ'

$$\underline{\dot{r}}' \underset{\text{Galilei}}{=} \underline{\dot{r}} - \underline{v} = c\,\underline{\hat{e}}_r - \underline{v}$$

$\Rightarrow \underline{\dot{r}}'$ ist richtungsabhängig und $|\underline{\dot{r}}'| \neq c$!!!

↯ Widerspruch zum Experiment!

Diese besagt: Lichtgeschwindigkeit ist in alle

Richtungen gleich und unabhängig von (geradlinig gleichförmiger) Bewegung des Beobachters relativ zur Quelle.

z.B. Michelson-Morley-Experiment (Nobelpreis 1907)

$\Rightarrow$ Galilei-Transformation kann so nicht richtig sein!

VII.2. Einstein'sche Postulate

Motivation: Ausgang des Michelson-Morley-Exp.
Faraday'sches Induktionsgesetz

$\rightarrow$ Idee der "absoluten Zeit" und des "absoluten Raumes" ist unhaltbar!

statt dessen:

- Äquivalenzpostulat ("Einstein'sches Relativitätsprinzip")

  $\Rightarrow$ Sämliche physikalischen Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab

- Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist unabhängig vom Inertialsystem!

(Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit)

<u>Frage nun:</u> wie müssen die Galilei-Trafos modifiziert werden, um Einstein'sche Postulate zu erfüllen?

VII.3. Die Lorentztransformation

Betrachte 2 Inertialsysteme Σ, Σ'

- Σ ruht
- Σ' bewegt sich mit $\underline{v}$ = const
- bei: $t = 0$ $\Sigma = \Sigma'$

Für eine Kugelwelle im ruhenden System gilt

$$|\underline{r}| = r = ct$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (*)$$

Aus dem zweiten Einsteinpostulat folgt: Auch in Σ' muss sich die Welle als Kugelwelle mit $v = c$ fortpflanzen!

$\Rightarrow$ es muss gelten

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (**)$$

wichtig: Die Zeit t muss auch mittransformiert werden.

Aus (*) und (**) folgt die Invarianzbeziehung

$$\boxed{c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2) \overset{!}{=} c^2t'^2 - (x'^2+y'^2+z'^2)}$$

Führe neue Notation ein ("Vierervektor")

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

"Vierervektor" im "Minkowski-Raum"

mit $x^0 = ct$ Zeitkomponente

$x^1, x^2, x^3 = x, y, z$ Raumkomponenten

Umschreiben der Invarianzbedingung

$$\underbrace{(x^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x^\mu)^2}_{s^2} \overset{!}{=} \underbrace{(x'^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x'^\mu)^2}_{s'^2}$$

abstrakt gesprochen

Das "Längenquadrat" (s^2) des Vierervektors bleibt erhalten.

$\Leftrightarrow$ Das Längenquadrat s^2 ist eine "Lorentz-Invariante"!

Wie lautet die konkrete Transformation?

Betrachte sog. "spezielle Lorentz-Transformation"

$\hat{=}$ Σ u. Σ' haben parallele Achsen

(Bsp $\underline{v} \parallel \hat{\underline{e}}_z - \underline{x}^3$ Einheitsvektor in z

Allgemeiner Ansatz:

$$(x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

- linear, da sonst gleichförmige Bewegung in Σ keine gleichförmige Bewegung in Σ' mehr wäre

- $L_{\mu\lambda}$ sind Elemente einer Transformationsmatrix $\underline{\underline{L}}$

aus $\underline{v} \parallel \underline{x}^3$ folgt $\Rightarrow$ • $x'^1 = x^1$

$x'^2 = x^2$

x'^0 und x'^3 dürfen nicht von x^1, x^2 abhängen!

$$\Rightarrow \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{00} & 0 & 0 & L_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_{30} & 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

Nutze nun die Invarianz des Längenquadrats

$$(x'^0)^2 - \cancel{(x'^1)^2} - \cancel{(x'^2)^2} - (x'^3)^2 \overset{!}{=} (x^0)^2 \underbrace{- (x^1)^2 - (x^2)^2}_{} - (x^3)^2$$

$$= -\cancel{(x'^1)^2} - \cancel{(x'^2)^2}$$

$$\Rightarrow (x'^0)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^3)^2 \qquad (**)$$

benutze (*)

$$x'^0 = L_{00} x^0 + L_{03} x^3$$

$$x'^3 = L_{30} x^0 + L_{33} x^3$$

Einsehen in (* 6), Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow L_{00}^2 - L_{30}^2 &= 1 \\ L_{33}^2 - L_{03}^2 &= 1 \\ L_{00} L_{03} - L_{30} L_{33} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(Es gilt $\cosh^2\chi - \sinh^2\chi = 1$)

$$\Rightarrow L_{33} = L_{00} = \cosh\chi$$

$$L_{30} = L_{03} = \sinh\chi$$

Festlegung von χ?

Beachte Bewegung des Ursprung Σ'

- vom ruhenden System Σ aus gilt

$$x^3 = vt = \frac{v}{c} ct = \frac{v}{c} x^0$$

- vom bewegten System Σ' aus gilt

$$x'^3 = 0 \quad \text{(weil Ursprung)}$$

andererseits

$$\begin{aligned} x'^3 = L_{30} x^0 + L_{33} x^3 &= \cosh\chi \cdot x^3 - \sinh\chi\, x^0 \\ &= \cosh\chi \frac{v}{c} x^0 - \sinh\chi\, x^0 \\ &= x^0 \left(\frac{v}{c} \cosh\chi - \sinh\chi \right) \\ &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\frac{v}{c} \cosh\chi - \sinh\chi \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \tanh\chi = \frac{v}{c}$$

Es folgt $\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

$$\sinh \chi = \cosh \chi \cdot \tanh \chi$$

$$= \frac{v/c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

führe Notation ein

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Matrix der speziellen Lorentz-Transformation $\underline{v} \parallel \underline{x}^3$

explizit:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(z - \beta c t) \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} z\right) \end{aligned}} \qquad (*)$$

Bemerkungen

- obige Beziehung gilt nur für den Spezialfall $\underline{v} \parallel \underline{\hat{z}}$!
- Allgemeine Lorentz-Trafo ? $\underline{v}$ nicht unbedingt parallel zu einer Achse von Σ

man kann zeigen:

$$\underline{\underline{L}}^{\text{allgemein}} = \underline{\underline{L}}^{\text{speziell}} \cdot \underline{\underline{R}}^{\text{Dreh}}$$

$\uparrow$ normale Drehmatrix

- im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten

$\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \simeq 1$

aus $(*)$ wird dann

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - vt \\ t' &= t \end{aligned}\right\}$$ normale Galilei-Transformation (für $\underline{v} \parallel \underline{\hat{e}}_z = \underline{x}^3$)

• Notation $\quad (x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} x^\lambda$

mit der Einstein'schen Summenkonvention

$$(x')^\mu = L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

über gleiche griechische Indizes nebeneinander stehender Größen wird summiert