~~Einstein:~~

~~Äquivalenzpostulat:~~

~~Physik bleibt in allen~~

VII.4. Folgerungen aus der Lorentztransformation

a) Relativität der Gleichzeitigkeit

es gibt keine absolute Zeit; die Zeit ist eine Funktion des Bezugssystems

Betrachte folgende Situation:

- Im System Σ finden zwei "Ereignisse" (z.B. Aussendung eines Lichtstrahls) an verschiedenen Orten z_1, z_2, aber zu denselben Zeiten t_1, t_2 statt

d.h. $\Delta t = t_1 - t_2 = 0$

Σ und Σ' haben parallele Achsen, $\underline{v} \parallel \hat{\underline{e}}_z$

Ursprünge fallen zusammen bei $t=0$

Von Σ' aus gesehen:

$$t_1' = \frac{t_1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) z_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t_2' = \frac{\cancel{t_1}\, t_2 - \left(\frac{v}{c^2}\right) z_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{\frac{v}{c^2}(z_2 - z_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq 0$$

In Σ' finden die beiden Ereignisse offensichtlich nicht gleichzeitig statt!

<u>Beispiel</u>

- $\Sigma' \mathrel{\hat{=}}$ Flugzeug, das sich mit Geschw. v relativ zu Σ bewegt

  $\Sigma \mathrel{\hat{=}}$ Erde (ruht)

- Annahme: Vorder- (z_1') und Hinterteil (z_2') des Flugzeugs (Σ') senden gleichzeitig einen Lichtstrahl aus

  $\Longrightarrow$ Diese Lichtstrahlen werden auf der Erde nicht gleichzeitig ankommen!

b) Zeitdilatation

- In Σ werden am selben Ort z zwei Lichtstrahlen in einem zeitl. Abstand $\Delta t = t_1 - t_2$ ausgesendet

- Im bewegten System Σ' kommen die Signale zu ~~den~~ folgenden Zeiten an

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{vz}{c^2}\right) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{vz}{c^2}\right)$$

$\Rightarrow$ Zeitl. Abstand in Σ':

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \gamma(t_1 - t_2)$$

$$= \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' > \Delta t$$

Folgerung:

Zeitintervall erscheint dem bewegten Beobachter als "gedehnt"
(im bewegten System "gehen die Uhren langsamer")

Man nennt Δt (~~Ei~~ Zeitintervall im ruhenden System) die "Eigenzeit"

* Experimenteller Hinweis

z.B. über den Zerfall instabiler $\mu^\pm$ - Mesonen

$$\left(\mu^\pm \rightarrow \underset{\text{Elektron / Positron}}{e^\pm} + \underset{\text{Neutrino}}{\nu_1} + \underset{\text{Antineutrino}}{\bar{\nu}_2} \right)$$

Diese Mesonen entstehen beim Eindringen kosmischer Strahlung in die Erdatmosphäre

Geschwindigkeit der Mesonen:

$$v(\mu^{\pm}) \approx 0.994\, c$$

Lichtgeschwindigkeit

Man findet:

Die auf der Erde gemessene Zerfallszeit ist sehr viele größer als die im Ruhesystem der Mesonen

| typ. Zerfallsgesetz
| $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
| Zahl der Teilchen
| $\tau_w = \frac{1}{\lambda}$ "Zerfallszeit"

Ergebnis:

Eigenzeit im Ruhesystem der Meson

$$t_w = \gamma \tau_w \approx 9\, \tau_w$$

auf der Erde gemessene Zerfallszeit

c) Längenkontraktion

betracht eine Längenmessung anhand eines Zollstocks

- Länge im Ruhesystem

$$l = \Delta z = z_1 - z_2$$

· Länge im bewegten System Σ'

$$l' = \Delta z' = z_1' - z_2'$$

$$= \gamma \Delta z - \gamma v \underbrace{(t_1 - t_2)}_{\Delta t} = \gamma \Delta z - \gamma v \Delta t \quad (*)$$

Einsetzen der Lorentztransf.

Wichtig:

Bei der Längenmessung in Σ' werden die Positionen der Ende des Zollstocks gleichzeitig abgelesen!

$\Rightarrow$ man darf nicht einfach in $(*)$ $\Delta t = 0$ setzen

(Relativität der Gleichzeitigkeit!)

Richtiger Weg:
betrachte zunächst Zeitunterschied in Σ'

$$t_1' = \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1\right)\gamma$$

$$t_2' = \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2\right)\gamma$$

$$\Delta t' = t_1' - t_2'$$

$$= \gamma\left(t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(z_1 - z_2)\right)$$

$$= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta z\right)$$

$$\overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \underbrace{\Delta t \overset{!}{=} \frac{v}{c^2}\Delta z}_{\text{Einsetzen in } (*)}$$

da gleichzeitige Messung in Σ' gefordert

$$\Delta z' = \gamma \Delta z - \gamma v \Delta t$$

$$= \gamma \Delta z - \gamma \frac{v^2}{c^2}\Delta z$$

$$= \gamma \Delta z \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{\leq 1}\,\Delta z$$

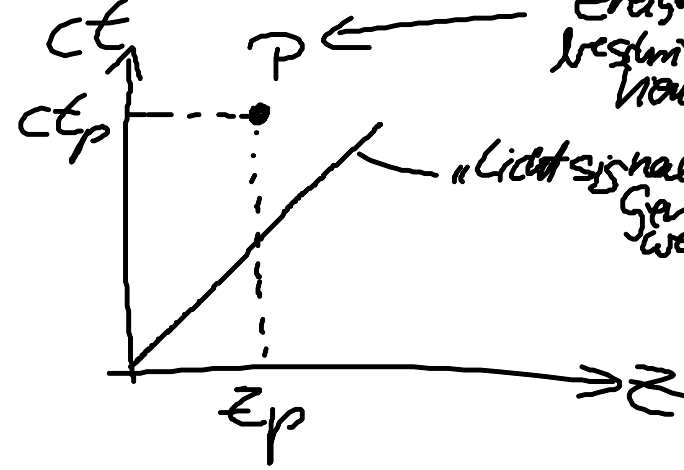
$$\Rightarrow \boxed{\Delta z' \leq \Delta z \quad \text{Längenkontraktion!}}$$

VII. 5. Minkowski-Diagramm

$\Rightarrow$ Illustration raumzeitlicher Bewegung

Betrachte wieder Inertialsystem Σ, Σ' mit $\underline{v} \parallel \hat{\underline{e}}_z$, und $\Sigma = \Sigma'$ bei $t=0$

Betrachte Σ



"Ereignis" in Σ beschrieben durch einen Vierervektor $\underline{x}^\mu$

„Lichtsignal" Gerade mit $s^2=0$ wobei $s^2 = c^2t^2 - z^2$ d.h. $s^2=0 \Leftrightarrow ct=z$

allgemein:

$$s^2 = c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2)$$

(hier $x=y=0$)

- man unterscheidet Vierervektoren mit folgenden Eigenschaften:

$s^2 > 0$: Das gilt für zeitartige Vierervektoren

$s^2 = 0$: "lichtartige" Vierervektoren

$s^2 < 0$: raumartiger Vierervektor

- Weltlinie: ~~[illegible]~~ Bahnen materieller Teilchen ($v \leq c$) verlaufen im Bereich $s^2 > 0$

Betrachte nun den Abstand zweier Ereignisse in Σ

$$P_1(ct_1, \underline{r}_1) \quad \text{und} \quad P_2(ct_2, \underline{r}_2)$$

Nehme an, dass $(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \parallel \underline{e}_z$

„Raumzeitlicher Abstand" der ~~Ere~~ Ereignisse?

betrachte den Differenzvektor

$$\underline{x}_{(1)}^{\mu} - \underline{x}_{(2)}^{\mu} = \begin{pmatrix} c(t_1 - t_2) \\ x_{(1)}^1 - x_{(2)}^1 \\ x_{(1)}^2 - x_{(2)}^2 \\ x_{(1)}^3 - x_{(2)}^3 \end{pmatrix}$$

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2$$

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2) - (z_1 - z_2)^2$$

„raumzeitl. Abstand" der Ereignisse

<u>es folgt:</u>

- $s_{12}^2 > 0$: $\quad c(t_1 - t_2) \geq z_1 - z_2$

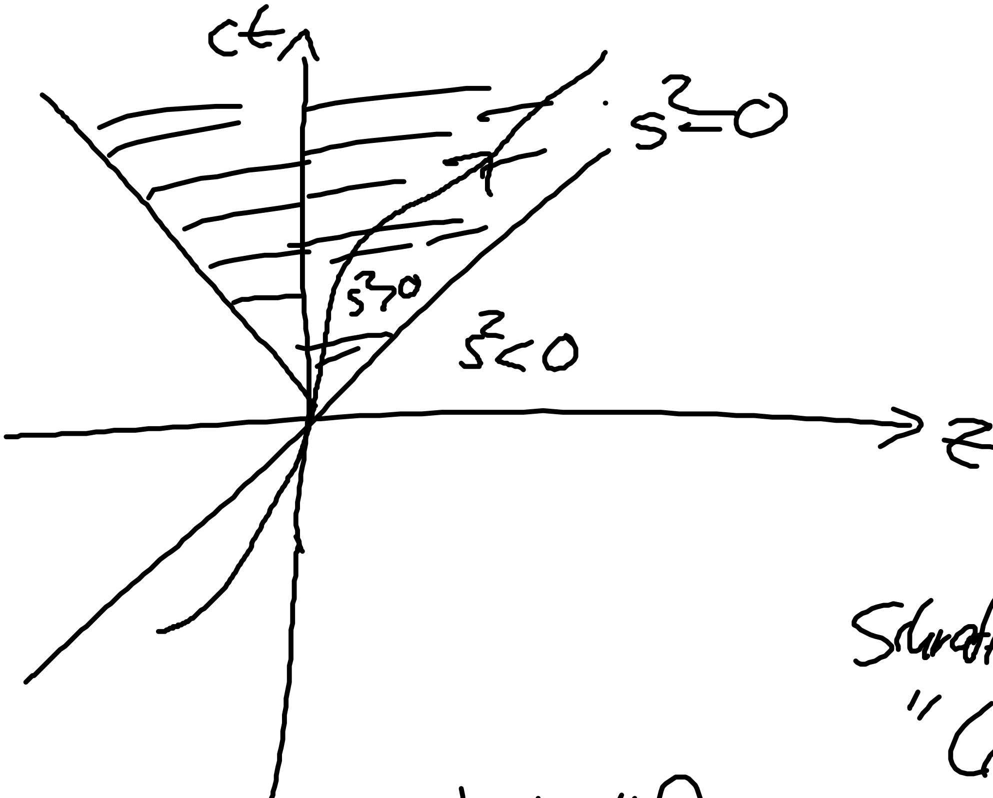
  die Ereignisse P_1 und P_2 sind durch ein Lichtsignal "überbrückbar"

  $\Rightarrow$ Kausale Korrelation möglich!

  (Weltlinien liegen in diesem Bereich des Minkowski-Diagramms)

- $s_{12}^2 < 0$ $\quad z_1 - z_2 > c(t_1 - t_2)$

  $\Rightarrow$ P_1 und P_2 sind nicht durch ein Lichtsignal überbrückbar



Schraffierter Bereich
"Lichtkegel"

mit $\underline{v} \parallel \hat{\underline{e}}_z$

Einzeichnen des bewegten ~~...~~ Inertialsystems Σ'

Zeitachse von Σ'

das ist $z'=0$

$\Rightarrow$ aus Lorentz-Trafo: $$\frac{z-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}=0$$

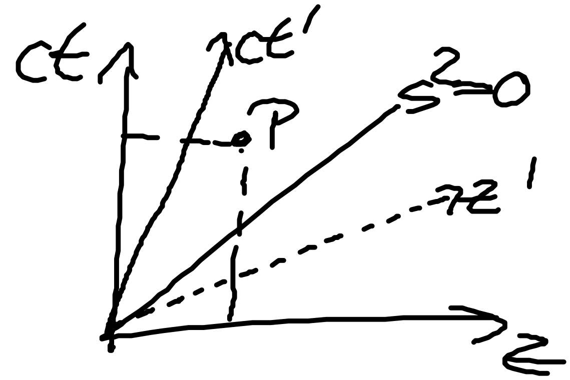
$$\Rightarrow z = vt \Rightarrow t = \frac{z}{v}$$

$$\Rightarrow ct = c \cdot \frac{z}{v} = \beta^{-1} z \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$\Rightarrow$ Die Zeitachse von Σ' ist im Minkowski-Diagramm des System Σ eine Gerade mit

Steigung $\beta^{-1} = \frac{c}{v} \geq 1$

$\Rightarrow$ Gerade liegt im Lichtkegel.



Raumachse

dort ist $t' = 0 \Leftrightarrow \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right) = 0$

$\Leftrightarrow ct = \beta z$

Gerade mit Steigung $\beta \leq 1$

VII. 6. Ko- und Kontravariante Tensoren

bisher Raumzeitelement.

$$\underline{x}^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Lorentztransformation

$$(x')^{\mu} = L_{\mu\lambda} x^{\lambda}$$

Komponente

<u>allgemeiner</u>

betrachte "Vierertensoren"

k-ter Stufe

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$$

Definition:

Bei einer Lorentztransformation der Koordinaten gemäß $x'^{\mu} = L_{\mu\lambda} x^{\lambda}$ transformieren sich die Komponenten des Vierertensors gemäß

$$(T')^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} = L_{\mu_1 \lambda_1} L_{\mu_2 \lambda_2} \cdots L_{\mu_k \lambda_k} T^{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$$

Beachte

- Der Vierertensor k-ter Stufe hat 4^k Komponenten
- Die Matrix $\underline{\underline{L}}$ ist kein Vierertensor; sie beschreibt gerade den Übergang zw. zwei Koordinatensystemen !