Theoretische Physik $\underline{VI}$: Vertiefung (Nichtgleichgewichtsstatistik)

Vorlesung E. Schöll WS 2015/16
11 ECTS – Leistungspunkte (4 + 2 SWS)

- Masterstudiengang Physik:
  Pflichtmodul Theoret. Physik $\underline{V}$ / $\underline{VI}$
  grundlagenorientiert : $\underbrace{\text{TP } \underline{V} \text{ (QM } \underline{II}) + \text{TP } \underline{VI} \text{ (Auswahl)}}_{\text{2 Scheine}}$
  anwendungsorientiert : $\underbrace{\text{TP } \underline{V} \text{ (QM } \underline{II}) \text{ oder TP } \underline{VI} \text{ (Auswahl)}}_{\text{1 Schein}}$
- kann auch als **Wahlpflichtfach** (8 SWS, 1 Schein, 12 ECTS)
  im Masterstudiengang gewählt werden,
  zus. mit Spezialvorles. (2 SWS) Synchr. and Chimera States (Maistrenko)
  oder Quantenoptik (Carmele)
  oder Seminar Chimera States Di $12^{15} - 13^{00}$ EW 731

VL : Do + Fr 10:15 – 12:00 EW 203
Ü : Do 12:15 – 14:00 EW 733

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv

Inhalt der VL

1. Stoch. Prozesse
2. Klass. Statistik im Nichtgleichgewicht
3. Rauschinduzierte Oszillationen u. Muster
4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht
5. Boltzmann-Gleichung
6. Rekombination u. Nichtgleichgewichtsstatistik

Lit.: s. Webseite

1. Stochastische Prozesse

Grundlagen der Statistik u. Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1. Zufallsvariablen

Ereignis (event) : Messergebnis von Observablen
Mikrozustand

Math. Struktur : <u>Ereignisalgebra</u> $\mathcal{A}$ (Boole'scher Verband)

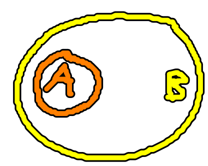
Menge, $\cup$ (Vereinigung „oder"), $\cap$ (Durchschnitt „und")

<u>Axiome</u> : für $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt

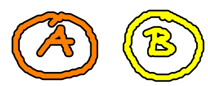
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ Kommutativ.gesetz
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoz.gesetz
- $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ Verschmelzungsgesetz
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distrib.gesetz

$\exists S$ (Einselement: Sicheres Ereignis) : $A \cap S = A$
$\exists \emptyset$ (Nullelement: leeres Ereignis) : $A \cup \emptyset = A$
$\forall A \in \mathcal{A}$ $\exists B$: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$: Komplement ($B = \bar{A}$, $B = \neg A$)

Induzierte <u>Halbordnung</u> : $A \subseteq B$, falls $A \cap B = A$
(A impliziert B)
$A \Rightarrow B$



A und B sind <u>disjunkt</u>, falls $A \cap B = \emptyset$



<u>Vollständige disjunkte Ereignismenge</u> (sample set)

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ mit $A_i \cap A_j = A_i \delta_{ij}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

Beispiel : $\{1,2,3,4,5,6\}$ beim Würfel
(NB: diese Menge ist keine Algebra, da $A \cup B \notin M$, $\bar{A} \in M$)

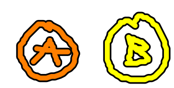
<u>Wahrscheinlichkeit</u> (Kolmogorov)

Sei $A \in \mathcal{A}$ (Ereignisalgebra), $S \in \mathcal{A}$ sicheres Ereignis

Axiome der Wahrscheinlichkeit $P(A)$, $P : \mathcal{A} \to [0,1]$

- $P(A) \geq 0$ $\forall A$

- $P(S) = 1$
- wenn $A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(disjunkte Ereignisse)



Folgerungen: $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$

$\Rightarrow P(A) \leq 1$

$P(\emptyset) = 0$, da $\underbrace{P(S)}_{1} = P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + \underbrace{P(S)}_{1}$

intuitiver Wahrscheinlichkeitsbegriff: relative Häufigkeit $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ Wahrscheinlichkeit für A unter der Bed., dass B eingetreten ist.

$P(A\cap B)$ heißt Verbundwahrscheinl. (joint probability)

A_1, A_2 heißen unkorreliert, falls

$P(A_2|A_1) = P(A_2)$

$\Leftrightarrow \boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2)}$

NB: somit folgt auch $P(A_1|A_2) = P(A_1)$

Zufallsvariable $X: \underset{\text{Ereignis}}{\tilde{M}} \longrightarrow \underset{\text{Realisierung}}{M}$ ist gegeben durch: (z.B. Identität $\tilde{M} \cong M$)

(i) Menge M von vollständig disjunkten Ereignissen X_i (sample set)

(ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_i)$ über M

Normierung $\sum_i P(X_i) = 1$ (wegen $\sum_i P(X_i) = P(\bigcup_i X_i) = P(S) = 1$)

Kontinuierliche Ereignismenge $(x \in \mathbb{R})$:

$P(x' \leq x \leq x'+dx') = \rho(x')\,dx'$ definiert

Wahrscheinlichkeitsdichte (Wahrscheinl.verteilung) $\rho(x)$

(Übergang zu diskreten Ereignissen: $\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x^{(i)}) P_i$

Normierung $\int_a dx\, \varrho(x) = 1$

<u>Physikal. Interpretation</u>: Realisierung der Wahrscheinl.verteil. durch <u>Ensemble</u> von vielen äquivalenten Systemen, d.h. durch Dichteverteilung $\varrho(x)\,dx$ der Ensemblemitglieder mit Werten $\in [x, x+dx]$.

<u>Verallgemeinerung auf d Zufallsvar.</u>

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \qquad d^dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$

Normierung $\int d^dx\, \varrho(x) = 1$

<u>Mittelwert</u> (Erwartungswert) einer Zufallsvar. x:

$\langle x \rangle := \int d^dx\, \varrho(x)\, x$

Für Fkt. $\varphi(x)$:

$\langle \varphi \rangle = \int d^dx\, \varrho(x)\, \varphi(x)$

d.h. lineares Funktional $f_\varphi : L \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \langle \varphi \rangle$ — L geeigneter Funktionenraum

<u>Unkorrelierte Zufallsvariable</u>

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $\boxed{\varrho(x_1, x_2) = \varrho_1(x_1)\, \varrho_2(x_2)}$

Dann gilt $\boxed{\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle}$

Beweis: $\int dx_1 dx_2\, \varrho(x_1, x_2)\, x_1 x_2 = \underbrace{\int dx_1\, \varrho_1(x_1)\, x_1}_{\langle x_1 \rangle} \underbrace{\int dx_2\, \varrho_2(x_2)\, x_2}_{\langle x_2 \rangle}$ □