

English Summary:  
 2.2 Fokker-Planck eq.

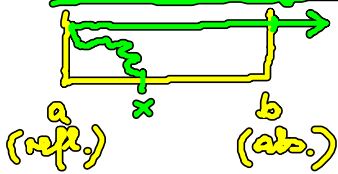
$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(x,t) = 0 \quad \text{local balance eq}$$

with probab. flux  $J_i(x,t) = A_i(x,t)p(x,t) - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (B_{ij}(x,t)p(x,t))$

Stationary sol. for hom. Markov processes:  $J(x) = \text{const.} = J(a) = J(b)$   
 reflecting boundary cond.  $J(a) = 0$

$$p^*(x) = \frac{N}{B(x)} \exp \left[ 2 \int_a^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right] \quad \text{potential sol.}$$

First passage time  $T(x) := \langle T \rangle = \int_0^\infty dt G(x,t)$

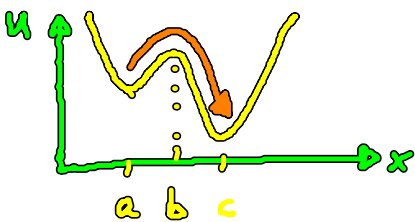


$$G(x,t) := \int_a^b dx' p(x',t|x,0) \equiv \text{Prob}(T \geq t)$$

$$T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\gamma(y)} \int_a^y \frac{\gamma(z)}{B(z)} dz$$

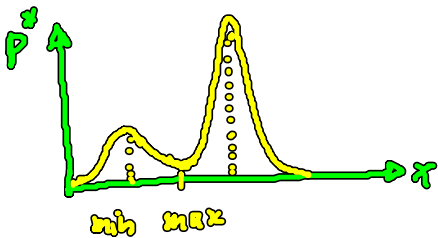
$$\gamma(x) = \exp \left[ 2 \int_a^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right]$$

Kramers' Problem: Entweichen über Potenzialbarriere  
 überdämpftes Teilchen im bistab. Pot.  $U$   
 $\dot{x} = -U'(x) \equiv A(x)$   
 Kraft



Diff. konst.  $D = \frac{\sigma^2}{2}$

$$\text{FP-ge.} \quad \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)p(x,t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t)$$



stat. lös.  $p^*(x) = N \exp \left[ - \int_a^x \frac{U(x')}{D} dx' \right] = \tilde{N} \exp \left[ - \frac{U(x)}{D} \right]$   
 (refl. Randbed.)

bimodale Wahrscheinl. verteilung Potenziallösung

Mittlere Ernteweißzeit  $a \rightarrow c$

$\Delta$  mean first passage time  $a \rightarrow b$  (Rand des Attraktorbeckens von  $a$ )

$$T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\gamma(y)} \int_a^y dz \frac{\gamma(z)}{D(z)} \quad \text{Intervall } (a, b)$$

$a \rightarrow -\infty$  (unf. Rand)

$b \rightarrow x_0 \approx b$  (absorb. Rand)

$x \rightarrow a$  (Auf. bed.)

$$\varphi(x) = e^{-\frac{u(x)}{D}}$$

$$\Rightarrow T(a \rightarrow x_0) = \frac{1}{D} \int_a^{x_0} dy e^{\frac{u(y)}{D}} \int_{-\infty}^y dz e^{-\frac{u(z)}{D}}$$

scharf gekippt bei  $y=b$ 
klein bei  $z=b \Rightarrow \int \approx \text{const.}$ ,  
scharf gekippt bei  $z=a$  oder  $y \approx b$

$$u(y) \approx u(b) - \frac{(y-b)^2}{2\sigma^2} \quad u(z) \approx u(a) + \frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}$$

$$T(a \rightarrow x_0) \approx \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left[\frac{u(y)}{D} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left[-\frac{u(z)}{D} - \frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\approx \frac{1}{D} \sqrt{2\pi D} \exp\left[\frac{u(b)}{D}\right] \sqrt{2\pi D} \exp\left[-\frac{u(a)}{D}\right]$$

(Taylorentw. v.  $u(x)$  um  $b$  | um  $a$ )

$$T(a \rightarrow x_0) \approx 2\pi\sigma^2 \exp\left[\frac{u(b) - u(a)}{D}\right]$$

Kramers-Rate

$$r_k = \frac{1}{T}$$

- $u(b) - u(a) =$  Potenzialbarriere
- Arrhenius-Formel der chem. Reaktionstheorie
- statist. Mechanik im Gleichgewicht:  $D = kT$

### 2.3 Langevin-Gleichung

Alternativer Zugang:

statt Dgl. für Wahrscheinl. verteilung  $p(x, t)$

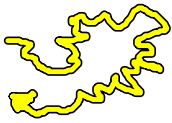
jetzt Dgl. für Zufallsvar.  $x(t)$  mit fluktuierender Kraft  $\xi(t)$  (Zufallskraft)

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t) \xi(t) \quad \text{stochast. Dgl.}$$

additives Rauschen:  $b(x, t) = \text{const.}$

multiplikatives Rauschen:  $b(x, t) \cdot x$ -abh.

Beispiel: Brown'sche Bewegung (Robert Brown 1827)



zufällige Bewegung von Pollen im Wasser  
(durch Stöße mit Wassermolekülen)

Theorie durch Einstein 1905 (Chapman-Kolmogorov-Fl.)

Langevin (1906):  $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$

mit  $\dot{x} = v$ :  $\dot{v} = -\alpha v + \xi(t)$   
Reibung Rauschen

Gauß'sches weißes Rauschen

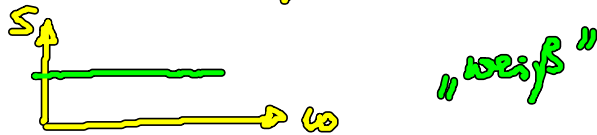
$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad \text{unkorrel. Zufallskraft}$$

höhere Momente verschwinden  $\Rightarrow$  Gaußverteilung

Spektrale Leistungsdichte (Wiener-Khinchin-Theorem):

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi(t) \xi(t+s) \rangle e^{-i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



Mathematische Problematik:  $\xi(t)$  ist unendlich, nicht integrierbar

Kalkül der stoch. Dgl. und stoch. Integration (Itô, Stratonovich)

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW(t) \quad \text{mit } \xi(t) = \frac{dW}{dt}$$

$W(t)$  stoch. Prozess

$$\Leftrightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t dt' a(x, t') + \int_0^t dW(t') b(x, t') \quad (\text{Itô})$$

Zusammenhang mit Fokker-Planck-Gl.:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) p(x, t | x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x, t)^2 p(x, t | x_0, t_0)]$$

Driftkoeff.  $A = a$       Diff. Koeff.  $D = \frac{B}{2} = \frac{b^2}{2}$

Beispiel

(i) Wiener-Prozess

$$\dot{x} = \sqrt{2D} \xi(t)$$

Langevin-Gl.

$$\triangleq \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x_0, t_0) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t | x_0, t_0)$$

FP-Gl.

Lösung der FP-Gl. zu Anfangsbed.  $p(x, t_0 | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$ :

• charakt. Fkt.  $\phi(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, t | x_0, t_0) e^{isx}$  (Fouriertrsp)  
erfüllt die Ggl.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -Ds^2 \phi, \quad \text{da } D \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} p \right) e^{isx} \stackrel{\text{part.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx p \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{isx} \right) = -Ds^2 \phi$$

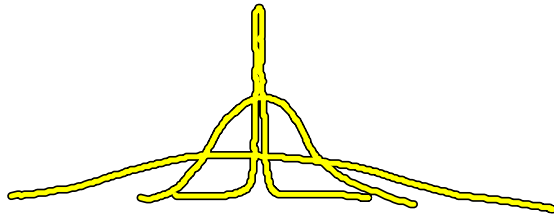
$$\Rightarrow \phi(s, t) = \exp[-Ds^2(t-t_0)] \phi(s, t_0) \quad \text{"} e^{isx_0} \text{ (Auf. bed.)}$$

Fourier-Rücktrsp:

$$p(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2D(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right]$$

$$\langle x(t) \rangle = x_0$$

$$\langle (\Delta X(t))^2 \rangle = 2D(t-t_0)$$



Autokorr. fkt. (nicht-stationär):

$$\begin{aligned} \langle X(t_1) X(t_2) \rangle_{x_0, t_0} &= \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 p(x_1, t_1, x_2, t_2 | x_0, t_0) \quad t_1 \geq t_2 \geq t_0 \\ &= \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_0, t_0) \quad \text{Markov} \end{aligned}$$

$$= \int dx_2 \left[ \int dx_1 x_1 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) \right] x_2 p(x_2, t_2 | x_0, t_0)$$

$$\langle X_1(t_1) \rangle_{x_2, t_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_1-t_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1 e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{4D(t_1-t_2)}}$$

$= x_2$  (Mittelwert bleibt zeitlich konstant)

$$= \int dx_2 x_2^2 p(x_2, t_2 | x_0, t_0)$$

Grund: Markov

$$\begin{aligned}
&= \langle X(t_2)^2 \rangle_{x_0, t_0} \\
&= 2D(t_2 - t_0) + x_0^2 \quad (\text{da Varianz der Gaußverteil.}) \\
&\quad \langle \Delta X^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - x_0^2 \\
&\quad = 2D(t - t_0)
\end{aligned}$$

unabh. von  $t_1$  !

⇒ Wiener-Prozess zu verschied. Zeiten statistisch unabhängig !

Ohne Anf. bed.  $x_0, t_0$  :

$$\begin{aligned}
\langle X(t_1)X(t_2) \rangle &= \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 P(x_1, t_1, x_2, t_2) \\
&= \int dx_2 \left[ \int dx_1 x_1 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) \right] x_2 P(x_2, t_2) \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\
&\quad \langle X_1(t_1) \rangle_{x_2, t_2}
\end{aligned}$$

⇒ Regressionstheorem :

Die Autokorr.fkt. für lin. Markovprozesse gehorcht denselben Burg.gln. wie die Mittelwerte, z.B.

$$\frac{d}{dt} \langle X(t) \rangle_{x_0, t_0} = -A \langle X(t) \rangle_{x_0, t_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle X(t)X(t_0) \rangle = -A \langle X(t)X(t_0) \rangle$$