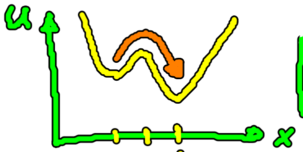
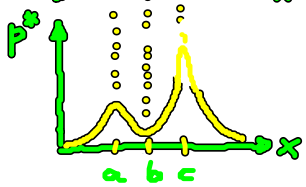
English Summary:

Kramers' problem: Escape over potential barrier



mean first passage time

$$\boxed{T(a \to x_0 < b) \approx 2\pi\tau\delta \exp\left[\frac{U(b)-U(a)}{D}\right]}$$



bimodal probability distribution

2.3 Langevin equation

$$\boxed{\dot{x} = a(x,t) + b(x,t)\,\xi(t)}$$

Wiener process

$$\boxed{\dot{x} = \sqrt{2D}\,\xi(t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}p(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)p(x,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x,t)^2 p(x,t)\right] \quad \text{Fokker-Planck eq.}$$

drift coeff. $A = a$ diff. coeff. $D = \frac{B}{2} = \frac{b^2}{2}$

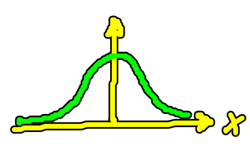
(ii) **Ornstein-Uhlenbeck-Prozess**

$$\boxed{\dot{x} = -kx + \sqrt{2D}\,\xi(t)} \;\hat{=}\; \boxed{\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{\partial}{\partial x}(kxp) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p} \quad p = p(x,t|x_0,t_0)$$

lineare Drift FP-gl.

stationäre Lösung auf $[a,b]$ mit reflektierenden Rändern:
$(J(x) = 0)$

$$p^*(x) = \mathcal{N} \exp\left[\frac{1}{D}\int_0^x dx'\,(-kx')\right] = \sqrt{\frac{k}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{k}{2D}x^2\right]$$



$$\langle X(t) \rangle = 0$$

$$\langle \Delta X^2 \rangle = \frac{D}{k}$$

zeitabh. Lösung: $\langle X(t) \rangle_{x_0 t_0} = x_0 e^{-k(t-t_0)}$

$$\langle \Delta X^2 \rangle_{x_0 t_0} = \frac{D}{k}\left(1 - e^{-2k(t-t_0)}\right)$$

Autokorr.fkt. (stationär; $t_0 \to -\infty$)

$$\langle X(t_1)X(t_2)\rangle_{x_0t_0} = \iint dx_1\,dx_2\,x_1x_2\,p(x_1,t_1;x_2,t_2\,|\,x_0t_0) \qquad t_1 \ge t_2 \ge t_0$$

$$= \int dx_2 \Big[\underbrace{\int dx_1\,x_1\,p(x_1,t_1\,|\,x_2,t_2)}_{\langle x_1\rangle_{x_2t_2} = x_2 e^{-k(t_1-t_2)}}\Big]\, x_2\, \underbrace{p(x_2,t_2\,|\,x_0,t_0)}_{\sqrt{\frac{k}{2\pi D}}\exp\left[-\frac{k}{2D}x_2^2\right],\ t_0\to-\infty}$$

$$= e^{-k(t_1-t_2)} \underbrace{\int dx_2\,x_2^2\,p^*}_{\langle x^2\rangle_* \,=\, \underbrace{\langle \Delta X^2\rangle_*}_{D/k} \,+\, \underbrace{\langle X\rangle_*}_{0}{}^2}$$

$$= \frac{D}{k} e^{-k|t_1-t_2|}$$

exponentielle Korrelation mit Korrelationszeit $\tau_c = \frac{1}{k}$

$$\boxed{G(\tau) \equiv \langle X(t+\tau)X(t)\rangle = \frac{D}{k} e^{-k|\tau|} = D\tau_c\, e^{-|\tau|/\tau_c}}$$

Spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau} G(\tau)$

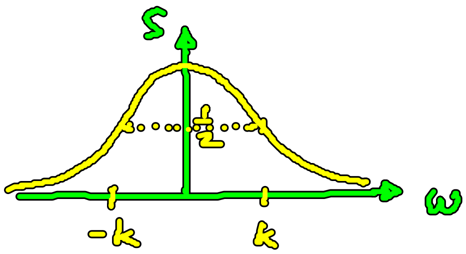
$$S(\omega) = \frac{D}{2\pi k}\int_0^\infty d\tau\, e^{-k\tau}\left(e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}\right)$$

$$= \frac{D}{2\pi k}\left[\frac{-1}{k+i\omega} e^{-k\tau - i\omega\tau}\Big|_0^\infty + \frac{-1}{k-i\omega} e^{-k\tau + i\omega\tau}\Big|_0^\infty\right]$$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{D}{2\pi k}\left(\frac{1}{k+i\omega} + \frac{1}{k-i\omega}\right) = \frac{D}{\pi}\,\frac{1}{\omega^2+k^2}}$$

Lorentzkurve

(Halbwertsbreite 2k)



Direkte Lösung der Langevin-Gl. $\dot{x} = -kx + \sqrt{2D}\,\xi(t)$:

Subst. $y = x e^{kt}$

$$\dot{y} = (\dot{x} + kx) e^{kt}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y} = [-kx + \sqrt{2D}\,\xi(t)] e^{kt} + kx e^{kt}$$

$$\dot{y} = \sqrt{2D}\, e^{kt}\, \xi(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sqrt{2D} \int_0^t e^{kt'} \xi(t')\, dt' + \underbrace{y(0)}_{x(0)\text{ Anf.bed.}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x(0) e^{-kt} + \sqrt{2D} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\xi(t')\, dt'}_{dW'}}$$

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle e^{-kt} + \underbrace{\sqrt{2D} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\langle \xi(t') \rangle}_{0} dt'}_{0}$$

zufällige Anf.wert. (unkorrel. mit $\xi(t)$)

Autokorrel.fkt.:

$$\langle x(t) x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle$$

$$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + 2D \int_0^t dt'' e^{-k(t-t'')} \int_0^{t'} dt''' e^{-k(t'-t''')} \underbrace{\langle \xi(t'') \xi(t''') \rangle}_{\delta(t''-t''')}$$

$\int dt''$ fällt weg für $t > t'$
sonst $\int dt'''$ weg

$$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + \frac{2D}{2k} e^{-k(t+t')} e^{2kt'''} \Big|_0^{t'}$$

$$= \left[\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2 - \frac{D}{k}\right] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|}$$

Stationär: $t, t' \to \infty$, $t - t'$ endlich

$$= \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|}$$ wie aus FP-Gl. !

Varianz: $t = t'$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \left[\langle \Delta x(0)^2 \rangle - \frac{D}{k}\right] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} \xrightarrow[\text{stationär}]{t, t' \to \infty} \frac{D}{k}$$

wie FP-Gl.

3. Rauschinduzierte Oszillationen und Muster

Normalerweise ist Rauschen (noise) unerwünscht, schmiert die deterministische Dynamik aus u. macht sie irregulär (destruktiv),

Neues Phänomen: <u>konstruktiver</u> Einfluss von Rauschen in nichtlinearen Systemen

- bestimmte Rauschintensität ist optimal

3.1 Stochastische Resonanz

Verstärkung eines schwachen period. Signals mit Hilfe von Rauschen.

Resonanz als Fkt. der Rauschintensität

<u>Lit.</u>: Gammaitoni, Hänggi, Jung, Marchesoni, Rev. Mod. Phys. <u>70</u>, 223 (1998)

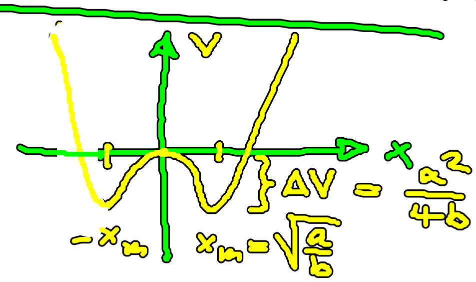
Benzi, Sutera, Vulpiani, J. Phys. A<u>14</u>, L451 (1981)
Nicolis C., Nicolis G., Tellus <u>33</u>, 225 (1981)
} period. Wiederkehr der Eiszeiten

(kleine period. Schwankungen der Erdachse u. der Exzentrizität der Umlaufbahn – reichen allein nicht aus zur Erklärung der Klimaschwankungen, $T \approx 20.000/100.000$ J. $\Rightarrow$ stoch. Resonanz)

Weitere Beispiele: el. Stromkreis (Schmitt-Trigger)
bistabiler Ringlaser
Neurophysiologie (Spiking: 2-Zustands-Sys.)
z.B. Flusskrebs (crayfish)
Quanten-Tunneln
raum-zeitl. Systeme (anregbare Medien)

<u>Überdämpftes Brown'sches Teilchen in bist. Potenzial</u>

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$$



mit period. Kraft $A_0 \cos(\Omega t)$

u. weißem Rauschen $\xi(t)$

Langevin-Gl.

$$\boxed{\dot{x} = -V'(x) + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)}$$

$\langle \xi(t) \rangle = 0$

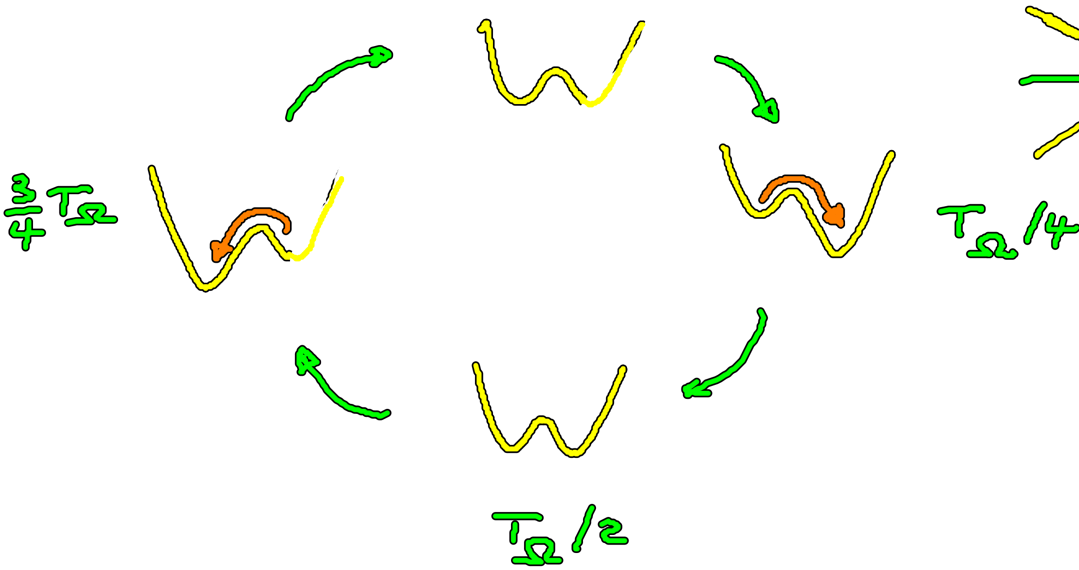
$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\,\delta(t-t')$

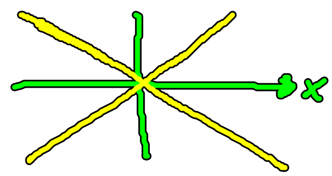
$a=b=1$: $\dot{x} = x - x^3 + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)$

Rauschinduz. Übergangsrate (Kramers-Rate)
zwischen $-x_m$ und $+x_m$ (ohne period. Kraft)

$$r_K = \frac{1}{T_K(D)} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) \qquad (a=b=1)$$

period. Modulation des Pot. $V(x) - A_0 x \cos(\Omega t)$:





$$\boxed{T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}}$$

$\Rightarrow$ period. Osz. im bistab. Pot. $\langle x(t) \rangle = \bar{x} \cos(\Omega t - \bar{\Phi})$

Verstärkung der Amplitude $\bar{x}$, wenn $\boxed{T_\Omega \approx 2 T_K(D)}$

$(\Omega \approx \pi r_K)$

$\Rightarrow$ stochast. Resonanz