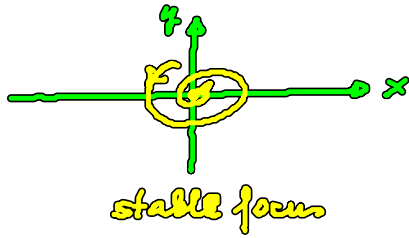


# English Summary :

## 3.2 Noise-induced oscillations

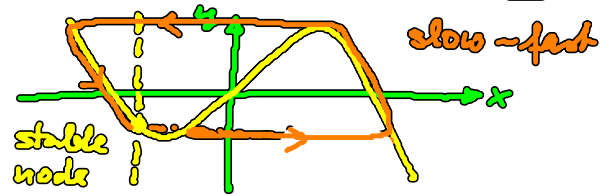
Van der Pol osc. below Hopf bif. ( $\epsilon < 0$ )

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + \sqrt{2D} \xi(t) \end{aligned}$$

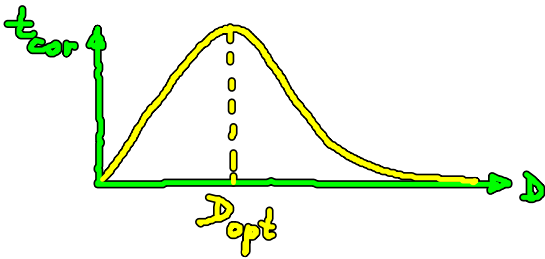


FitzHugh-Nagumo model (exc. type II) ( $a > 1$ )

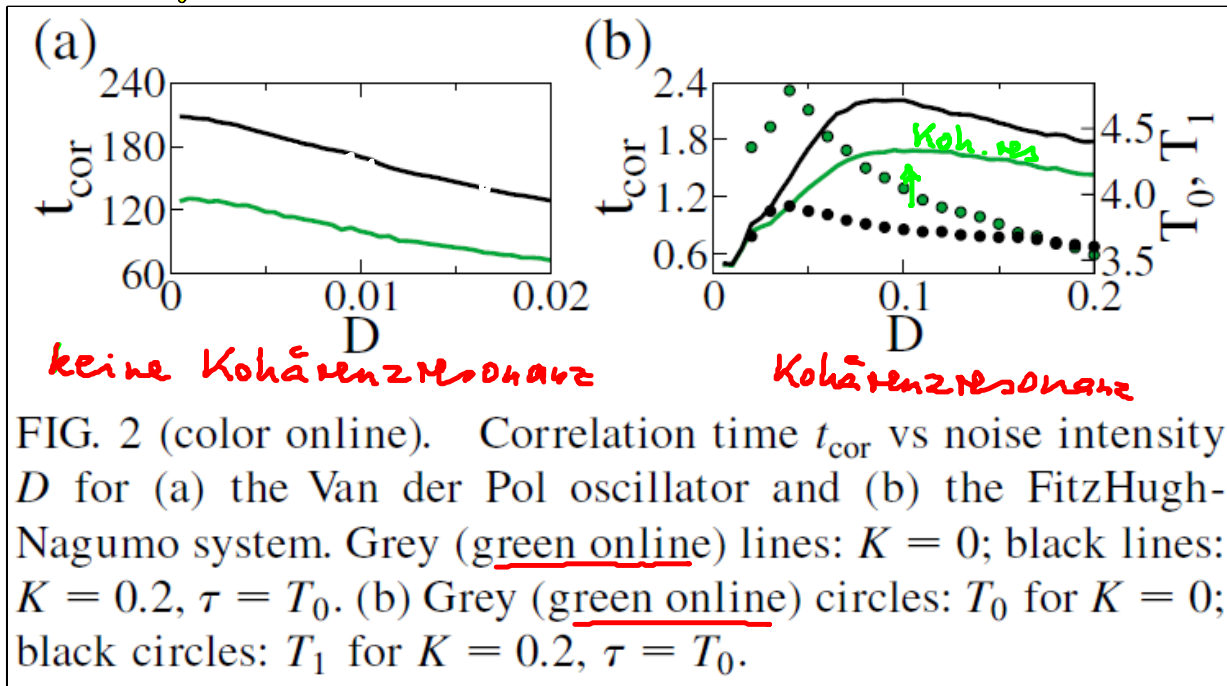
$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + \sqrt{2D} \xi(t) \end{aligned}$$



## Kohärenzresonanz



Jamov, Balazs, Schöll, PRL (2004)

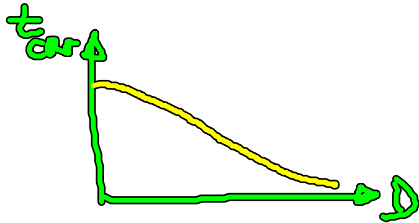


## Zusammenspiel zweier Zeitskalen (FHN-Modell) :

- Aktivierungszeit (Fixpt.  $\rightarrow$  Schwelle) : Irregularität nimmt ab mit  $D$

- Spike-Dauer + Erholungszeit (detern.): Irregularität nimmt zu mit  $D$

NB: Van der Pol-Osz. zeigt keine Kohärenzresonanz



$t_{cor}$  monoton abnehmend  
(kein Schwellenverhalten,  
nur lokale Eigenschaft des Trj.)

### 3.4 Korrelationszeit und spektrale Leistungsdichte

Analyt. Näherung für  $t_{cor}(D)$  für Van der Pol-Osz.

(self-cons. mean-field-Näherung, Pomplun et al., Europhys. Lett 31, 36 (2005))

Näherung für  $D \ll |\epsilon|/\omega_0$ :  $\langle x^2 \rangle$  klein

$$\epsilon - x^2 \approx \epsilon - \langle x^2 \rangle = \tilde{\epsilon} < 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \tilde{\epsilon} y - \omega_0^2 x + D \zeta(t) \end{cases}$$

lin. stoch. Dgl. (multivariater Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)  
stationär:  $\langle x_s \rangle = 0$

$$d\underline{x}_s = -\underline{A} \underline{x}_s dt + \underline{B} d\underline{W}(t) \quad \underline{x}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & -\tilde{\epsilon} \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Varianz-Matrix

$$\underline{\sigma} = \langle \underline{x}_s(t) \otimes \underline{x}_s(t) \rangle = \frac{D^2}{-2\tilde{\epsilon}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{D^2}{-2\tilde{\epsilon}\omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\epsilon - \langle x^2 \rangle)\omega_0^2}$$

selbstkonsistente Lösung von  $\langle x^2 \rangle$  in Abhäng. von  $D$

$$\langle x^2 \rangle^2 - \epsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$$

$$\langle x^2 \rangle^2 = \frac{\epsilon}{2} (\pm) \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}}$$

(+) unphys. Lös.,  
da  $\langle x^2 \rangle > 0$

$$\Rightarrow \tilde{\epsilon} = \epsilon - \langle x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}} \right)$$

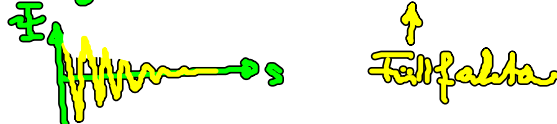
Dämpfung  $\tilde{\epsilon} =$  Abstand zum Hopf-Bif.   
 wächst mit Raumintensität  $D$ !

Autokorrel. fkt. für linearen stoch. Prozess

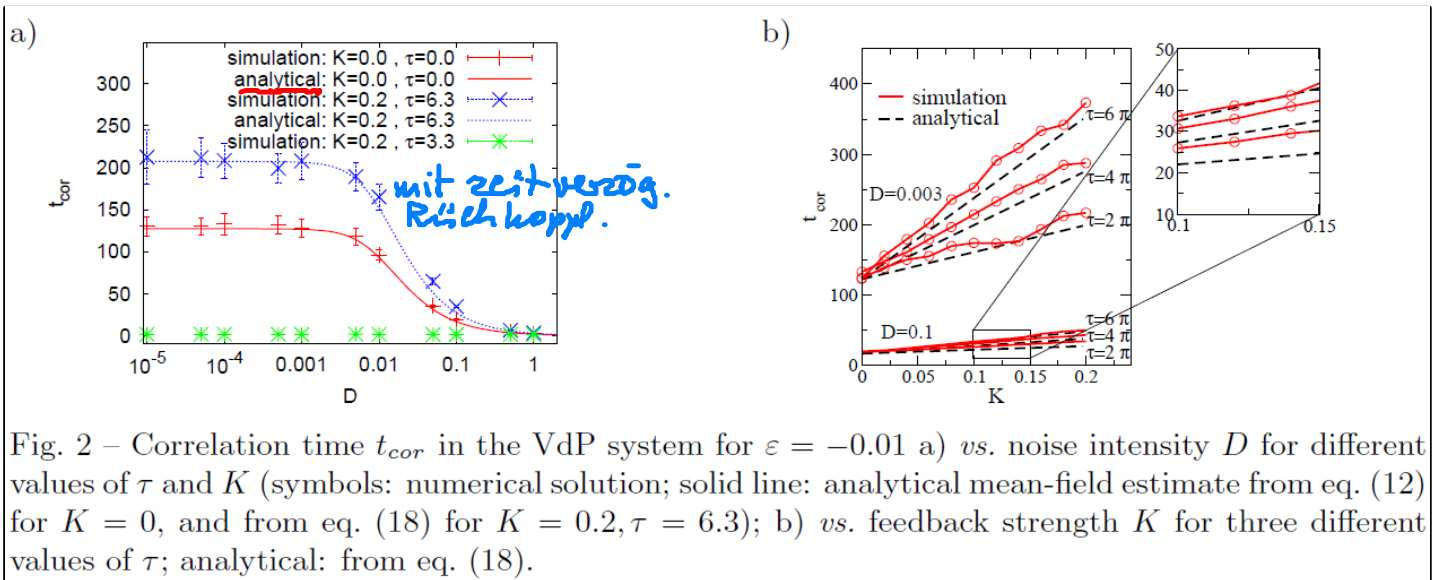
$$\Phi_{yy}(s) = \langle y(t+s)y(t) \rangle \approx \Phi_{yy}(0) e^{\lambda s} \cos \omega s$$

wobei  $\lambda_{1,2} = p \pm i\omega = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\tilde{\epsilon}^2}{4}}$  die Eigenwerte von A sind.

$$\rightarrow t_{cor} = \frac{1}{\Phi(0)} \int_0^\infty |\Phi(s)| ds \approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{\lambda s} ds = -\frac{2}{\pi p}$$



$$\Rightarrow t_{cor}(D) \approx \frac{4}{\pi |\tilde{\epsilon}(D)|}$$



Pomplun et al (2005)

### Spektrale Leistungsdichte

Fourier-Transf. des mean-field-Gl.  $\dot{x} = y$

$$(x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{x}(\omega))$$

$$\dot{y} = \tilde{\epsilon} y - \omega_0^2 x + D \zeta(t)$$

$$-i\omega \hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega)$$

$$-i\omega \hat{y}(\omega) = \tilde{\epsilon} \hat{y}(\omega) - \omega_0^2 \hat{x}(\omega) + D \hat{\zeta}(\omega)$$

$$\text{Elim. von } \hat{x}(\omega) = \frac{\tilde{\epsilon}}{\omega} \hat{y}(\omega)$$

$$-i\omega \hat{y} - \tilde{\epsilon} \hat{y} + i \frac{\omega^2}{\omega_0} \hat{y} = D \hat{f} \quad | i\omega$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega \hat{f}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\epsilon}}$$

$$\langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \frac{(i\omega)(-i\omega') \langle \hat{f}(\omega) \hat{f}^*(\omega') \rangle}{(\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\epsilon})(\omega'^2 - \omega_0^2 + i\omega' \tilde{\epsilon})}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}(\omega) \hat{f}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \underbrace{\langle f(t) f(t') \rangle}_{S(t-t')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t}}_{\delta(\omega - \omega')} \end{aligned}$$

R.S.:  $\omega = \omega'$

$$\Rightarrow \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2 \delta(\omega - \omega')}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \tilde{\epsilon}^2}$$

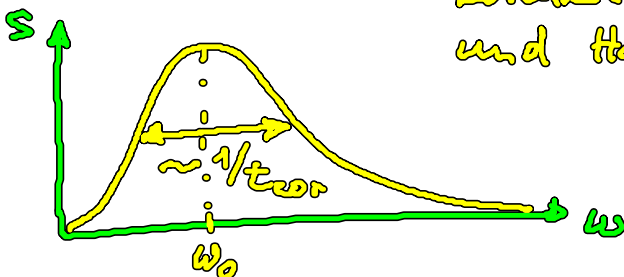
andererseits mit Wiener-Khinchin-Theorem:

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \langle y(t) y(t') \rangle^{t+s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega' s} \langle y(t) y(t+s) \rangle}_{S(\omega')} \end{aligned}$$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \tilde{\epsilon}^2}$$

Lorentzkurve mit Max. bei  $\omega_0$

und Halbwertsbreite  $\approx \frac{|\tilde{\epsilon}|}{2} = \frac{2}{\pi \tau_{\text{cor}}(D)}$



## Analyt. Näherung für FitzHugh-Nagumo-Modell:

Prager, Lerch, Schimansky-Gier, Schöll, J. Phys. A 40, 11045 (2007)  
Konvaris, Schimansky-Gier, Schöll: Eur. Phys. J. ST 191, 29 (2010)  
2-state Master eq.

## gekoppelte FitzHugh-Nagumo-Systeme mit Rauschen

Hanschmidt, Balazs, Janson, Schöll: PRE 74, 051906 (2006)

## stochast. Synchronisation

farbiges Rauschen:  $\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \sigma^2 e^{-|t-t'|/\tau_c}$

↔ generiert durch Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\tau_c \dot{\eta} = -\eta + \sqrt{2\sigma^2 \tau_c} \xi(t) \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

Brandstetter, Dalker, Schöll: Phil. Trans. R. Soc. A 368, 391 (2010)