English Summary:

4.3 Quantization of radiation field

Lagrange density $\mathcal{L}(\psi, \dot\psi, \partial_k\psi, t) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}\cdot\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\cdot\underline{B}\right)$

Lagrange functional $L = \int d^3r\, \mathcal{L}(\psi, \dot\psi, \partial_k\psi, t)$

Lagrange eqs. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi} - \sum_k \partial_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} = 0}$

field $\psi_k(\underline{r},t) = A_k(\underline{r},t)$

conj. field $\pi_k(\underline{r},t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi_k} = \varepsilon_0 \dot A_k = -\varepsilon_0 E_k$

field op. $[\hat\psi(\underline{r}), \hat\pi(\underline{r}')] = i\hbar\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ $\quad \boxed{[\hat A_k(\underline{r}), \hat\pi_{k'}(\underline{r}')] = i\hbar\delta_{kk'}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$

mode expansion:

$$\hat\psi_k = \hat A_k(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(\underline{r})\,\hat q_\lambda(t)$$

$$\varepsilon_0\dot{\hat A}_k = \hat\pi_k(\underline{r},t) = \sqrt{\varepsilon_0}\sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(\underline{r})\,\hat p_\lambda(t) \qquad \hat p_\lambda \equiv \dot{\hat q}_\lambda$$

$A_{\lambda k}(\underline{r})$ bilden ein ONS : $c_\lambda c_{\lambda'}\int d^3r\, A_{\lambda k}(\underline{r}) A_{\lambda' k}(\underline{r}) = \delta_{\lambda\lambda'}$

$$\Rightarrow \quad \hat q_\lambda = \sqrt{\varepsilon_0}\, c_\lambda \int d^3r\, A_{\lambda k}(\underline{r})\,\hat A_k(\underline{r},t)$$

$$\hat p_\lambda = \frac{c_\lambda}{\sqrt{\varepsilon_0}}\int d^3r\, A_{\lambda k}(\underline{r})\,\hat\pi_k(\underline{r},t)$$

Einsetzen von $\hat A_k$ und $\hat\pi_k$ in $H$

$$\Rightarrow \boxed{\hat H = \frac{1}{2}\sum_\lambda\left(\hat p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 \hat q_\lambda^2\right)}$$

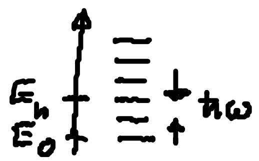
Strahlungsfeld entspricht einem System aus unendlich vielen harmon. Osz.

Vertauschungsrel. von $\hat p, \hat q$ :

$$[\hat q_\lambda, \hat p_\lambda] = c_\lambda c_{\lambda'}\int d^3r \int d^3r'\, A_{\lambda k}(\underline{r}) A_{\lambda' k'}(\underline{r}')\,[\hat A_k(\underline{r}), \hat\pi_{k'}(\underline{r}')]$$

$= i\hbar\,\delta_{\lambda\lambda'}$

## Formulierung durch Erzeugungs- u. Vernichtungsop.




Einführung neuer Op. $a_\lambda$, $a_\lambda^+$ : Vernichter oder Erzeuger eines Photons der Mode $\lambda$

$$H\, a^+|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\,|n+1\rangle$$

Wir definieren

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_\lambda &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}}\,\hat{q}_\lambda + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}}\,\hat{p}_\lambda \\ \hat{a}_\lambda^+ &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}}\,\hat{q}_\lambda - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}}\,\hat{p}_\lambda \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \hat{q}_\lambda &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}}\,(\hat{a}_\lambda + \hat{a}_\lambda^+) \\ \hat{p}_\lambda &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}}\,(\hat{a}_\lambda - \hat{a}_\lambda^+) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\left(\hat{n}_\lambda + \tfrac{1}{2}\right)}$$

Photonenzahlop. $\boxed{\hat{n}_\lambda = \hat{a}_\lambda^+\hat{a}_\lambda}$

Vertauschungsrel. von $\hat{a}_\lambda^+$, $\hat{a}_\lambda$ :

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_\lambda^+, \hat{a}_{\lambda'}^+] = 0$$

$\Rightarrow$ Photonen sind Bosonen

Zeitentwickl. $\dot{\hat{a}}_\lambda = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}_\lambda]$

$$\dot{\hat{a}}_\lambda = i\omega_\lambda \hat{a}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_\lambda(t) = \hat{a}_\lambda(0)\,e^{i\omega_\lambda t}$$

Felder:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{A}_k &= \sum_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}(r)\,(\underbrace{\hat{a}_\lambda}_{\sim e^{i\omega_\lambda t}} + \underbrace{\hat{a}_\lambda^+}_{e^{-i\omega_\lambda t}}) \\ \hat{E}_k &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\Pi}_k = \sum_\lambda i\omega_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}(r)\,(\hat{a}_\lambda - \hat{a}_\lambda^+) \\ \hat{B}_k &= \epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = \sum_\lambda \epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{A}_{\lambda j}(r)\,\hat{a}_\lambda + \text{c.c.} \end{aligned}}$$

nur eine Mode in x-Richtung

$$\hat{A} = \tilde{A}(x)\,\hat{a}_\lambda(0)\,e^{i\omega_\lambda t} + \tilde{A}^*(x)\,\hat{a}_\lambda^+(0)\,e^{-i\omega_\lambda t}$$

## 4.4 Quantenzustände des Lichtes

oBdA einmodiges Feld : $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$

### 4.4.1 Fock-Zustände = Photonenzahlzustände

Eigenzustände von $\hat{n}$ : $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$

und somit auch zu $\hat{H}$: $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$

Erzeugung von $|n\rangle$ : $n$-malige Anwend. von $\hat{a}^+$ auf Vakuumzustand

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle}$$

aus Normierung $\langle n|n\rangle = 1$

Wirkung von $\hat{a}, \hat{a}^+$ :

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

jeder reine Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich nach $|n\rangle$ entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{c_n}$$

$|\langle n|\psi\rangle|^2$ : Wahrscheinlichkeit, $n$ Photonen zu registrieren

- Photonenzahlstatistik im reinen Fock-Zustand:

$$\langle\hat{n}\rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\langle n|\hat{a}^+|n-1\rangle$$
$$= n\,\langle n|n\rangle = n$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle \equiv \langle(\hat{n}-n)^2\rangle = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = \langle\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}\rangle - n^2 = 0$$

scharf (Eigenwert)

→ Extremfall einer sub-Poisson-Statistik

- Feldstärkestatistik im Fockzustand

$$\hat{E} = C\hat{a} + C^*\hat{a}^+$$

Mittelwert $\langle n|\hat{E}|n\rangle = c\underbrace{\langle n|\hat{a}|n\rangle}_{0} + c^*\langle n|\hat{a}^+|n\rangle = 0$

Varianz $\langle(\Delta\hat{E})^2\rangle = c^2\underbrace{\langle\hat{a}^2\rangle}_{0} + c^{*2}\langle\hat{a}^{+2}\rangle + |c|^2\underbrace{\langle(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})\rangle}_{\sqrt{n}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} - \langle\hat{E}\rangle^2$

$$= |c|^2(2n+1)$$
$$= |c|^2(2\langle n\rangle + 1)$$

<u>Bem.:</u> • Schwankung nimmt mit wachsender Photonenzahl zu

- Im Vakuumzustand $|0\rangle$ verschwindet die Schwankung nicht

  $\Rightarrow$ spontan. Emission

- Quadraturkomponenten
  (orthogonale)

  – definiere normierte Orts- u. Impulsop. $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ (Anf.bed.)

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^+(0)$$
$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^+(0))$$
$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i\,[a^+, a]$$

Unschärferelation $\Delta\hat{x}_1\,\Delta\hat{x}_2 \geq 1$ $\qquad \langle n|\hat{x}_1|n\rangle = 0$

$\langle n|\hat{x}_2|n\rangle = 0$

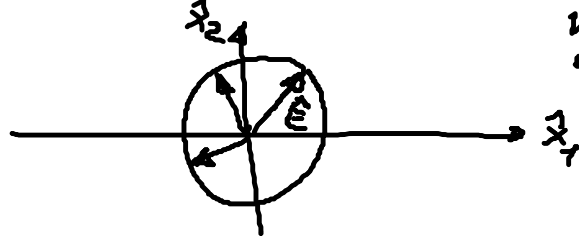
im Vakuumzust. gilt $\Delta\hat{x}_1\,\Delta\hat{x}_2 = 1$ (min. Unschärfe)

Darstellung der Feldstärke durch $\hat{x}_1, \hat{x}_2$:

$$\hat{E} = c\,(\underbrace{\hat{a}(0)}_{=\frac{\hat{x}_2 + i\hat{x}_1}{2i}} e^{+i\omega t} + \underbrace{\hat{a}^+}_{=\frac{-\hat{x}_2 + ix_1}{2i}} e^{-i\omega t})$$

$$= c\left[\hat{x}_2\left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2i}\right) + ix_1\left(\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2i}\right)\right]$$

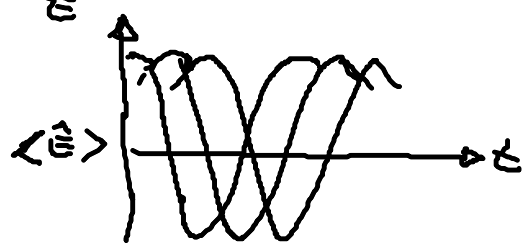
$$= -C \left[ \hat{x}_2 \sin \omega t + \hat{x}_1 \cos \omega t \right]$$




Koord.system durch Anf. bed. definiert

Amplitude des $\hat{E}$-Feldes ist fest, aber Phase ist unbestimmt

$$\Delta \hat{x}_1 = \Delta \hat{x}_2 = 1$$




Resultat: Fock-Zustand ist maximal nichtklassisch