

English Summary:

4.3 Quantization of radiation field

$$\text{Lagrange density } \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_k \varphi, t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$$

$$\text{Lagrange functional } L = \int d^3r \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_k \varphi, t)$$

$$\text{Lagrange eqs. } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Leftrightarrow \Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$$

$$\text{field } \varphi_k(\mathbf{r}, t) = A_k(\mathbf{r}, t)$$

$$\text{conj. field } \pi_k(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} = \epsilon_0 \dot{A}_k = -\epsilon_0 E_k$$

$$\text{field op. } [\hat{\varphi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$[\hat{A}_k(\mathbf{r}), \hat{\pi}_{k'}(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta_{kk'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

mode expansion:

$$\hat{\varphi}_k = \hat{A}_k(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{q}_{\lambda}(t)$$

$$\epsilon_0 \dot{A}_k = \hat{\pi}_k(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{p}_{\lambda}(t) \quad \hat{p}_{\lambda} \equiv \dot{\hat{q}}_{\lambda}$$

$$A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \text{ bilden ein DNS: } c_{\lambda} c_{\lambda'} \int d^3r A_{\lambda k}(\mathbf{r}) A_{\lambda' k}(\mathbf{r}) = \delta_{\lambda \lambda'}$$

$$\Rightarrow \hat{q}_{\lambda} = \sqrt{\epsilon_0} c_{\lambda} \int d^3r A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{A}_k(\mathbf{r}, t)$$

$$\hat{p}_{\lambda} = \frac{c_{\lambda}}{\sqrt{\epsilon_0}} \int d^3r A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{\pi}_k(\mathbf{r}, t)$$

Einsetzen von \hat{A}_k und $\hat{\pi}_k$ in \hat{H}

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (\hat{p}_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 \hat{q}_{\lambda}^2)$$

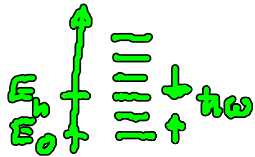
Strahlungsfeld entspricht einem System aus unendlich vielen harmon. Osz.

Vertauschungsrel. von $\hat{p}_{\lambda}, \hat{q}_{\lambda}$:

$$[\hat{q}_{\lambda}, \hat{p}_{\lambda'}] = c_{\lambda} c_{\lambda'} \int d^3r \int d^3r' A_{\lambda k}(\mathbf{r}) A_{\lambda' k'}(\mathbf{r}') [\hat{A}_k(\mathbf{r}), \hat{\pi}_{k'}(\mathbf{r}')]$$

$$= i\hbar \delta_{\lambda\lambda'}$$

Formulierung durch Erzeugungs- u. Vernichtungsop.



Einführung neuer Op. a_λ, a_λ^+ : Vernichtet oder Erzeugt einen Photon der Mode λ

$$H a^+ |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) |n+1\rangle$$

$$\text{Wir definieren } \begin{cases} \hat{a}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\hbar}} \hat{q}_\lambda + i\sqrt{\frac{\hbar}{2\hbar\omega_\lambda}} \hat{p}_\lambda \\ \hat{a}_\lambda^+ = \sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\hbar}} \hat{q}_\lambda - i\sqrt{\frac{\hbar}{2\hbar\omega_\lambda}} \hat{p}_\lambda \end{cases} \left. \begin{array}{l} \hat{q}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2\hbar\omega_\lambda}} (\hat{a}_\lambda + \hat{a}_\lambda^+) \\ \hat{p}_\lambda = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}} (\hat{a}_\lambda - \hat{a}_\lambda^+) \end{array} \right\}$$

$$\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(\hat{n}_\lambda + \frac{1}{2} \right)$$

Photonenzahloper.

$$\hat{n}_\lambda = \frac{\hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda}{\lambda}$$

Vertauschungsrel. von $\hat{a}_\lambda^+, \hat{a}_\lambda$:

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_\lambda^+, \hat{a}_{\lambda'}^+] = 0$$

→ Photonen sind Bosonen

$$\text{zeitentw. } \dot{\hat{a}}_\lambda = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}_\lambda]$$

$$\dot{\hat{a}}_\lambda = i\omega_\lambda \hat{a}_\lambda \Rightarrow \hat{a}_\lambda(t) = \hat{a}_\lambda(0) e^{i\omega_\lambda t}$$

Felder:

$$\begin{aligned} \hat{A}_k &= \sum_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}(t) \left(\hat{a}_\lambda + \hat{a}_\lambda^+ \right) \\ &\quad \sim e^{i\omega_\lambda t} \quad \sim e^{-i\omega_\lambda t} \\ \hat{E}_k &= -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla_k = \sum_\lambda i\omega_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}(t) (\hat{a}_\lambda - \hat{a}_\lambda^+) \\ \hat{B}_\lambda &= \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_j} A_i = \sum_\lambda \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{A}_{\lambda j}(t) \hat{a}_\lambda + \text{c.c.} \end{aligned}$$

nur eine Mode in x-Richtung

$$\hat{A} = \tilde{A}(x) \hat{a}_\lambda(0) e^{i\omega_\lambda t} + \tilde{A}^*(x) \hat{a}_\lambda^+(0) e^{-i\omega_\lambda t}$$

4.4 Quantenzustände des Lichtes

oBdA einmodiges Feld: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$

4.4.1 Fock-Zustände = Photonenzahlzustände

Eigenzustände von \hat{n} : $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$

und somit auch zu \hat{H} : $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle$

Erzeugung von $|n\rangle$: n -malige Anwend. von \hat{a}^\dagger auf Vakuumzustand

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

↳ aus Normierung $\langle n|n\rangle = 1$

Wirkung von \hat{a}, \hat{a}^\dagger : $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Jeder reine Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich nach $|n\rangle$ entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{c_n}$$

$|\langle n|\psi\rangle|^2$: Wahrscheinlichkeit, n Photonen zu registrieren

- Photonenzahlstatistik im reinen Fock-Zustand:

$$\begin{aligned}\langle \hat{n} \rangle &= \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \langle n|\hat{a}^\dagger|n-1\rangle \\ &= n \langle n|n\rangle = n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle &= \langle (\hat{n} - n)^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - n^2 = 0 \\ &\text{schon! (Eigenwert)}\end{aligned}$$

→ Extremfall einer sub-Poisson-Statistik

- Feldstärkestatistik im Fockzustand

$$\hat{E} = c\hat{a} + c^*\hat{a}^\dagger$$

$$\text{Mittelwert } \langle n | \hat{E} | n \rangle = c \underbrace{\langle n | \hat{a} | n \rangle}_0 + c^* \langle n | \hat{a}^\dagger | n \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Varianz } \langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle &= c^2 \underbrace{\langle \hat{a}^2 \rangle}_0 + c^{*2} \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle + |c|^2 \underbrace{\langle (\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \rangle}_{\sqrt{n} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \sqrt{n+1}} - \langle \hat{E} \rangle^2 \\ &= |c|^2 (2n+1) \\ &= |c|^2 (2 \langle n \rangle + 1) \end{aligned}$$

Bem. → Schwankung nimmt mit wachsender Photonenzahl zu

- Im Vakuumzustand $|0\rangle$ verschwindet die Schwankung nicht

⇒ spontan. Emission

- Quadraturkomponenten (orthogonal)

— definiere normierte Orts- u. Impulsop. \hat{x}_1, \hat{x}_2 (Auf. bed.)

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^\dagger(0)$$

$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^\dagger(0))$$

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]$$

$$\text{Unschärferelation } \Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{x}_2 \geq 1 \quad \langle n | \hat{x}_1 | n \rangle = 0$$

$$\langle n | \hat{x}_2 | n \rangle = 0$$

in Vakuumzust. gilt $\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{x}_2 = 1$ (min. Unschärfe)

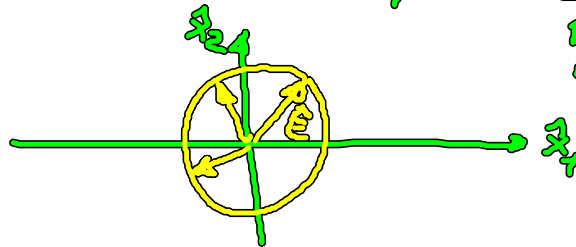
Darstellung der Feldstärke durch \hat{x}_1, \hat{x}_2 :

$$\hat{E} = c \left(\hat{a}(0) e^{+i\omega t} + \hat{a}^\dagger(0) e^{-i\omega t} \right)$$

$$\frac{\hat{x}_2 + i\hat{x}_1}{2i} \quad \parallel \quad \frac{-\hat{x}_2 + i\hat{x}_1}{2i}$$

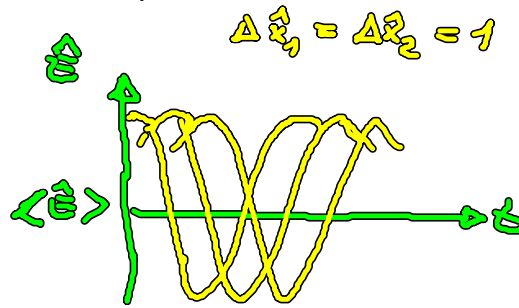
$$= c \left[\hat{x}_2 \left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2i} \right) + i\hat{x}_1 \left(\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2i} \right) \right]$$

$$= -c [\hat{x}_2 \sin \omega t + \hat{x}_1 \cos \omega t]$$



Koordinaten
durch Auf. bed.
definiert

Amplitude des
 \vec{E} -Feldes ist fest,
aber Phase ist
unbestimmt



Resultat: Fock-Zustand ist maximal nichtklassisch