English Summary:

4.4.2 Glauber states = coherent states = classical states

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad \alpha = |\alpha| e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$ Poisson distribution of Fock states

$$\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle = 2C|\alpha|\cos\theta \qquad \langle\alpha|(\Delta\hat{E})^2|\alpha\rangle = C^2$$

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \qquad \langle\alpha|(\Delta\hat{n})^2|\alpha\rangle = |\alpha|^2 = \bar{n}$$

displaced vacuum state $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$

displacement op. $\boxed{\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}}$

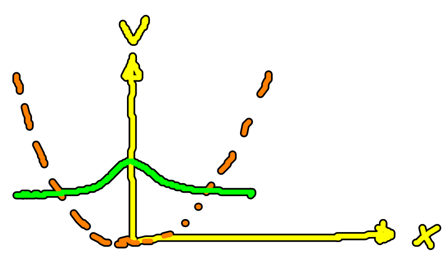
4.4.3 Gequetschte Zustände

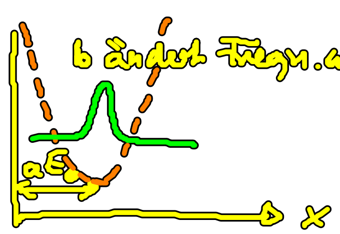
(squeezed)

Motivation: harmon. Osz. mit externem Feld

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eE_0(ax - bx^2)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\underbrace{(k + 2ebE_0)}_{\text{Barriere}}x^2 - eaE_0x$$





b = 0 : Lösung ist verschobener Grundzustand.

Abschalten von E_0 liefert kohärenten Zustand.

b ≠ 0 : zusätzl. Barriere ⟹ größere Federkonstante (Frequenz) qm. Formulierung

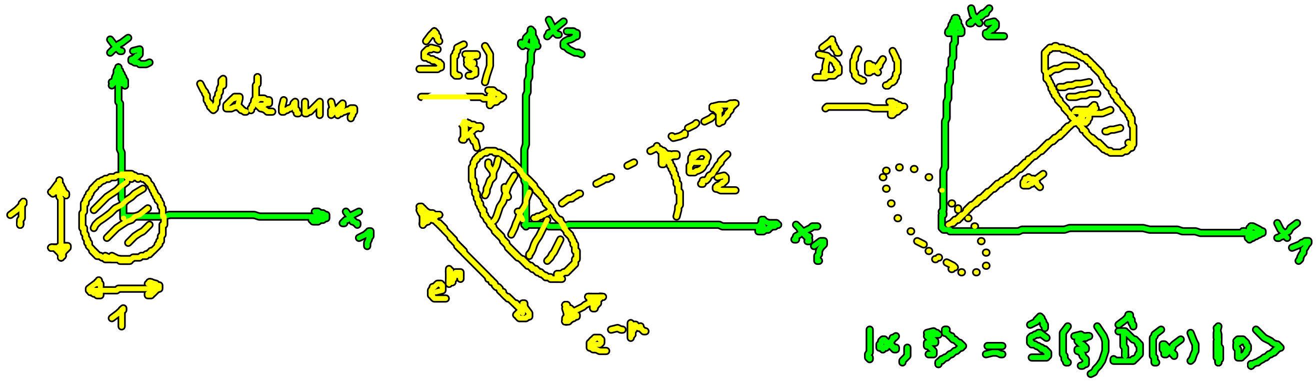
- man benötigt 2-Photonen-Prozesse im Hamiltonian

$$z.B.\ H_i = i\hbar\left(g(\hat{a}^+)^2 - g^*(\hat{a})^2\right)$$

z.B. im nichtlin. Kristall
(nichtlin. Osz., z.B. Van der Pol-Osz.)

Definiere einen Quetsch-Operator $S(\xi)$ (squeeze op.)

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi \hat{a}^{+2}} \qquad \text{mit } \xi = re^{i\theta} \quad \text{Quetsch-Parameter}$$

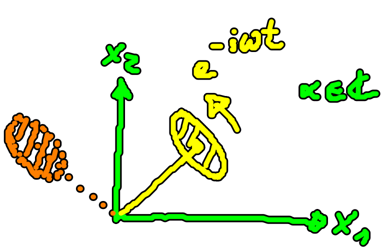


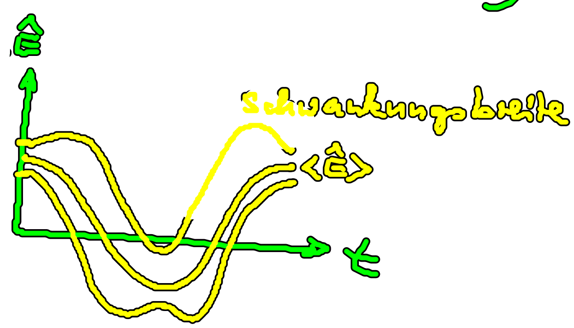
$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle$$

kohärenter gequetschter Zustand

Def. $y_1 + iy_2 = (x_1 + ix_2)e^{-i\frac{\theta}{2}}$ gedrehte Quadraturkomponenten

$$\left.\begin{aligned}(\Delta y_1)^2 &= \langle y_1^2\rangle - \langle y_1\rangle^2 = e^{-2r}\\ (\Delta y_2)^2 &= e^{2r}\end{aligned}\right\} \Delta y_1 \Delta y_2 = 1$$





Quetschung ist nichtklassischer Effekt
(quantenoptischer)

- Fock-Zustand ist maximal amplitudengequetscht, aber kein kohärent gequetschter Zustand.

4.4.4 gemischte Zustände

- bisher: Diskussion der Quantenzustände des Lichts in reinen Zuständen
- Realität: es liegt ein Gemisch von Zuständen vor

Beschreibung durch Dichtematrix (statist. Operator)

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} p_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi|$$

$\hat{\rho}$ kann bzgl. Fock-Zuständen entwickelt werden

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \rho_{nm} |n\rangle\langle m|$$

$\hat{\rho}$ bzgl. Glauber-Zuständen entwickelt

$$\hat{\rho} = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\hat{\rho}|\beta\rangle}_{R(\alpha,\beta)} \langle\beta| \qquad \alpha\in\mathbb{C}$$

R-Darstellung der Dichtematrix

andere Möglichkeit: P-Darstellung (diagonale kohärente Darstell.)

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha,\alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| \, d^2\alpha$$

d.h. wir pressen die QM in ein klass. Format

- funktioniert gut z.B. bei thermischem Licht
  bei Glauber-Zustand
- aber z.B. bei Fock-Zuständen ist P nicht wohldefiniert

Phasenraumfunktionen: P-Darstellung

Ziel: $\hat{\rho} = \int P(\alpha,\alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| \, d^2\alpha$

Mittelwert von $\hat{F}(\hat{a},\hat{a}^+) = \sum_n \sum_m c_{nm} (\hat{a}^+)^n \hat{a}^m$:

($\hat{F}$ ist ein normalgeordneter Op.: $\hat{a}^+$ links, $\hat{a}$ rechts)

$$\langle \hat{F}(\hat{a},\hat{a}^+)\rangle = \mathrm{tr}\left[\hat{\rho}\hat{F}(\hat{a},\hat{a}^+)\right]$$
$$= \sum_n \sum_m c_{nm} \, \mathrm{tr}\left[\hat{\rho}(\hat{a}^+)^n \hat{a}^m\right]$$

Definiere operatorwertige δ-Fkt.

$$\delta(\alpha^* - \hat{a}^+)\,\delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{\pi^2}\int e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^+)}\, e^{\beta^*(\alpha - \hat{a})}\, d^2\beta$$

$$= \int d^2\alpha \; \underline{\sum_n \sum_m c_{nm}}\; \underbrace{\mathrm{tr}\left[\hat{\varrho}\, \delta(\alpha^* - \hat{a}^+)\,\delta(\alpha - \hat{a})\right]}\; \underbrace{(\alpha^*)^n \alpha^m}_{F(\alpha,\alpha^*)}$$

$$= \int d^2\alpha \; P(\alpha,\alpha^*)\, F(\alpha,\alpha^*)$$

wobei: $\quad P(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{tr}\left[\hat{\varrho}\, \delta(\alpha^* - \hat{a}^+)\,\delta(\alpha - \hat{a})\right]$

Bestimmung von P aus $\hat{\varrho}$:

1) $\langle -\beta|\hat{\varrho}|\beta\rangle$

2) $P(\alpha,\alpha^*) = \dfrac{e^{|\alpha|^2}}{\pi}\displaystyle\int \langle -\beta|\hat{\varrho}|\beta\rangle\, e^{|\beta|^2}\, e^{-\beta\alpha^* + \beta^*\alpha}\, d^2\beta$

"<u>Coherent state representation</u>"

Eigenschaften von P:

$\mathrm{tr}\,\hat{\varrho} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int P(\alpha,\alpha^*)\, d^2\alpha = 1$

$\hat{\varrho} = \int P(\alpha,\alpha^*)\, |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha$

<u>Beispiel</u>: • thermisches Licht $\quad \varrho_{nm} = \dfrac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}\,\delta_{nm}$

(therm. Gleichgewichtsverteilung: Bose-Verteil.)

$\Rightarrow \quad P(\alpha,\alpha^*) = \dfrac{1}{\pi\bar{n}}\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}}$ (Gauß-Verteilung bzgl. der kohär. Zustände)

• kohärenter Zustand $|\alpha_0\rangle \quad$ reiner Zustand

$$P(\alpha,\alpha^*) = \delta(\alpha - \alpha_0)\,\delta(\alpha^* - \alpha_0^*)$$

<u>NB</u>: andere mögliche Darstellungen

1. <u>Q-Darstellung</u> (für antinormal geordnete Op. $\hat{A}$)

$$\langle \hat{A}(\hat{a},\hat{a}^+)\rangle = \int Q(\alpha,\alpha^*)\, A(\alpha,\alpha^*)\, d^2\alpha$$

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{tr}\left[\hat{\varrho}\,\delta(\alpha-\hat{a})\,\delta(\alpha^*-\hat{a}^+)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\hat{\varrho}|\alpha\rangle$$

② <u>Wigner-Weyl-Darstellung</u> (für symm. Op.)