Wiederholung Supraleitung:

Polaronkopplung:

- ähnliche Form wie Coulombkopplung

$$\tilde{V}_{kq} \quad a^{+}_{k+q} \; a^{+}_{\tilde{k}-q} \; a_{\tilde{k}} \; a_{k}$$

Form des Kopplungselements

$$\frac{|D_q|^2 \, 2 w_q}{(\varepsilon_q - \varepsilon_{k-q})^2 - w_q^2}$$

## XII.2 Der Grundzustand der BCS-Theorie

Ziel: Beschreibung der Supraleitung

Effekt: Unterhalb einer Sprungtemperatur $T_c$ gibt es einen Zustand unendlicher Leitfähigkeit (kein Strom)

$T_c = T_c(M)$ mit $M$: Ionenmasse
(Isotopeneffekt)

$\Rightarrow$ Elektron – Phonon WW ist.

Erklärung: eff Elektron – Elektron WW
gebunden Cooperpaare erzeugt

Startpunkt:

Wir müssen wissen, welcher Anteil der Elektron – Elektron WW am stärksten ist, Folgende Beiträge

(1) $V_{k,\tilde{q}} \approx -V_0 \Leftarrow$ ungefähr konstant

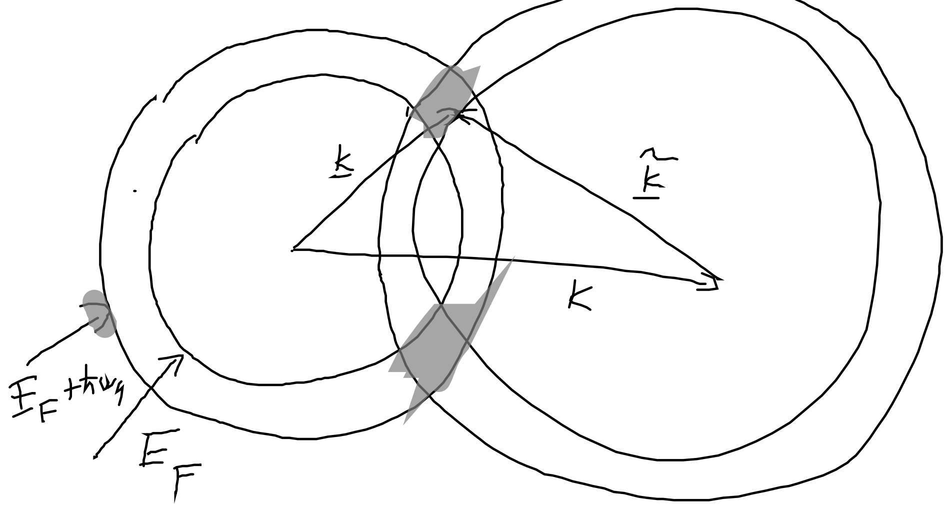
Nur der Bereich, wo die

WW anziehend ist.

Also nah an der Fermi-Kante.

(2) Wir nehmen nur den Fall $k = -\tilde{k}$ mit.

Also Paare mit verschwindendem Impuls $K \leq k + \tilde{k} \approx 0$




Wechselwirkung kann nur außerhalb der Fermikugel erfolgen, dort mit $E_k \leq E_F + \hbar\omega_q$ anziehend!

<u>Also</u>:

$$H_{ww} = -V_0 \sum_{kq\sigma} a^+_{k+q,\sigma} a^+_{-k-q,-\sigma} a_{-k,-\sigma} a_{k\sigma}$$

Spin

Mit der Nebenbedingung $V_0 \neq 0$ für $|E(k+q) - E(k)| \leq \hbar\omega_q$

sowie $H_0 = \sum_{k\sigma} E(k) a^+_{k\sigma} a_{k\sigma}$

Erinnerung an die statistische Physik, großkanonische Potential (Variation der Teilchenzahl!)

$$\Rightarrow H \rightarrow H - E_F N$$

$$\Rightarrow H_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon(\underline{k})\, a^+_{k\sigma} a_{k\sigma}$$

$$\varepsilon(k) = E(k) - E_F$$

Zunächst WW außer acht lassen.

Ansatz für neue Quasiteilchen:

$$\alpha_{k\sigma} = u_k a_{-k\sigma} - v_k a^+_{-k-\sigma}$$

$$\alpha^+_{k,\sigma} = u_k a^+_{k\sigma} - v_k a_{-k-\sigma}$$

$$\alpha_{-k,-\sigma} = u_k a_{-k,-\sigma} + v_k a^+_{k\sigma}$$

$$\alpha^+_{-k-\sigma} = u_k a^+_{-k,-\sigma} + v_k a_{k\sigma}$$

Mit der Bedingung $u^2_{k\sigma} + v^2_{k\sigma} = 1$

und $u_{k\sigma} = u_{-k-\sigma}$ $v_{k\sigma} = -v_{-k,\sigma}$

bleiben Fermi Vertauschungsrelationen erhalten.

(Bogoliubov Transformation)

Schauen wir uns $H_\sigma$ an:

$$a_{k\sigma} = u_k \alpha_{k\sigma} + v_k \alpha^+_{-k-\sigma}$$

$$a^+_{k\sigma} = u_k \alpha^+_{k\sigma} + v_k \alpha_{-k-\sigma}$$

$$a_{-k-\sigma} = u_k \alpha_{-k,-\sigma} - v_k \alpha^+_{k\sigma}$$

$$a^+_{-k-\sigma} = u_k \alpha^+_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma}$$

$$\Rightarrow H_\sigma = \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) \left( a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} + a^+_{-k-\sigma} a_{-k-\sigma} \right)$$

$$= \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) \Big( (u_k \alpha^+_{k\sigma} + v_k \alpha_{-k-\sigma})(u_k \alpha_{k\sigma} + v_k \alpha^+_{-k-\sigma})$$
$$+ (u_k \alpha^+_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma})(u_k \alpha_{-k-\sigma} - v_k \alpha^+_{k\sigma}) \Big)$$

$$= \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) \Big( 2 v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(\alpha^+_{k\sigma} \alpha_{k\sigma} + \alpha^+_{-k\sigma} \alpha_{-k\sigma})$$
$$+ 2 u_k v_k (\alpha^+_{k\sigma} \alpha^+_{-k\sigma} + \alpha_{-k\sigma} \alpha_{k\sigma}) \Big)$$

Die Idee ist, dass die $\alpha$ Operatoren Anregungen aus dem Grundzustand beschreiben (Ersatzvakuum).

Also $\alpha_{k\sigma} |0\rangle = 0$.

Wenn wir alle $\alpha$ vernichten im Vakuumzustand sollten wir den Grundzustand erhalten!

$$\prod_k \alpha_{k\sigma} \alpha_{-k-\sigma} |vac\rangle = \prod_k (u_k a_{k+} - v_k a^+_{k-})(u_k a_{k-} + v_k a^+_{k+}) |vac\rangle$$

$$= \prod_k \Big( u_k^2 \cancel{a_{k+} a_{k-}} + u_k v_k \big( \underbrace{a_{k+} a^+_{k+}}_{1 - a^+_{k+} a_{k+}} - \cancel{a^+_{k-} a_{k-}} \big)$$
$$+ v_k^2 a^+_{k+} a^+_{k-} \Big) |vac\rangle$$

$$= \prod_k \left(u_k v_k + v_k^2 \, a^+_{k+} \, a^+_{k-}\right) |vac\rangle$$

Achtung der Zustand ist nicht normiert!

$$\Rightarrow \quad |0\rangle = \prod_k \left(u_k + v_k \, a^+_k \, a^+_{-k}\right) |vac\rangle$$

Wir müssen $u_k$, $v_k$, so wählen, dass $H_0 |0\rangle$ minimal ist.

$$H_0 = \sum_k \varepsilon(k) \Big( 2 u_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)\left(\alpha^+_{k+}\alpha_{k+} + \alpha^+_{-k-}\alpha_{-k-}\right)$$
$$+ 2 u_k v_k \left(\alpha^+_k \alpha^+_{-k-} + \alpha_{-k-}\alpha_k\right)\Big)$$

Wechselwirkung soll verschwinden

$$2 u_k v_k \left(\alpha^+_k \alpha^+_{-k-} \alpha_k\right) |0\rangle = 0$$

Falls $u_k v_k = 0$ 1. Forderung!

$$(u_k^2 - v_k^2)\left(\alpha^+_{k+}\alpha_{k+} + \alpha^+_{-k-}\alpha_{-k-}\right)|0\rangle \text{ und } 0$$

$u_k^2 - v_k^2 = 0$ ergeben!

Beitrag: $\sum_k \varepsilon(k) \, 2 v_k^2$

Setze $v_k = 1$ für $k \leq k_F$

und $v_k = 0$ für $k > k_F$ minimale Energie

Wichtig wegen $N = \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = \sum_k 2 v_k^2$

wird dann durch die Teilchenzahl fixiert.

<u>Jetzt für Wechselwirkendes System betrachten:</u>

<u>Also:</u>

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) \left( a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} \right) - V_0 \sum_{kq\sigma} a^+_{k+q\sigma} a^+_{-k-q-\sigma} a_{-k-\sigma} a_{k\sigma}$$

Transformation auf $\alpha$ $\alpha^+$ Operatoren!

$$\begin{aligned} H = \sum_k & \varepsilon(k) \Big( 2 v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) \left[ \alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k} \right] \\ & + 2 u_k v_k \left( \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_{-k} \alpha_k \right) \Big) \\ - V \sum_{kk'} \Big[ & u_k v_k u_{k'} v_{k'} \left( 1 - \alpha_{-k'}^+ \alpha_{-k'} - \alpha_{k'}^+ \alpha_{k'} \right) \\ & \left( 1 - \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k} - \alpha_k^+ \alpha_k \right) \\ & + (u_k^2 - v_k^2) u_{k'} v_{k'} \left( 1 - \alpha_{-k'}^+ \alpha_{-k'} - \alpha_{k'}^+ \alpha_{k'} \right) \\ & \left( \alpha_{-k} \alpha_k + \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ \right) \\ & + \left( u_k^2 \alpha_{-k} \alpha_k - v_k^2 \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ \right) \\ & \left( u_k^2 \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ - v_k^2 \alpha_{-k'} \alpha_{-k'} \right) \Big] \end{aligned}$$

Wir wenden den Grundzustand darauf an:

$$\begin{aligned} H | \phi_0 \rangle = \Big[ & 2 \sum_k \varepsilon(k) v_k^2 \\ & - V \sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} \\ & + \sum_k \Big[ \underbrace{2 u_k v_k \varepsilon(k) - (u_k^2 - v_k^2) V \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}}_{(*)} \Big] \\ & \left( \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_{-k} \alpha_k \right) \Big] | \phi_0 \rangle \end{aligned}$$

Damit $\alpha$ gute nicht WW Teilchen sind:

$$\sum_{k'} u_{k'} v_{k'} =: \frac{\Delta}{V}$$

Für $T=0$ muß dann

$$2 u_k v_k \varepsilon(k) = \Delta (u_k^2 - v_k^2)$$ sein

Ansatz

$$u_k^2 = \frac{1}{2}(1+\xi_k) \quad \text{und} \quad v_k^2 = \frac{1}{2}(1-\xi_k)$$

erfüllt $u_k^2 + v_k^2 = 1$ !

$$\xi_k = \frac{\varepsilon(k)}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

Wir müssen noch $\Delta$ bestimmen!

$$\Delta = V \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} = \frac{V}{2} \sum_k \sqrt{1-\xi_k^2}$$

$$= \frac{V}{2} \sum_k \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V}{2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_{-\hbar\omega_{ph}}^{\hbar\omega_{ph}} d\varepsilon \underbrace{Z(\varepsilon)}_{\text{Zustandsdichte}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

Nahe $\Delta$ ansetzen $Z(\varepsilon) \approx Z(\varepsilon_F)$

$$1 = V_0 Z_0 \, \mathrm{Arcsinh}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = \hbar\omega_D \frac{1}{\sinh \frac{1}{V_0 Z_0}} \underset{V_0 \text{ klein}}{\approx} 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0 Z_0}}$$

Das Ergebnis gibt es nicht in Störungstheorie! (unendlich viele Potenzen)

$\Delta$ stellt sich als Bindungsenergie heraus!

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Energie abgesenkt wird!