Wiederholung Supraleitung:

Polaronkopplung:

ähnliche Form wie Coulombkopplung

$$\tilde{V}_{kq} \; a^{+}_{k+q} \; a^{+}_{\tilde{k}-q} \; a_{\tilde{k}} \; a_{\tilde{k}}$$

Form des Kopplungselements

$$\frac{|D_q|^2 \, 2 w_q}{(\varepsilon_q - \varepsilon_{k-q})^2 - w_q^2}$$

XII.2 Der Grundzustand der BCS-Theorie

Ziel: Beschreibung der Supraleitung

Effekt: Unterhalb einer Sprungtemperatur T_c gibt es einen Zustand unendlicher Leitfähigkeit (kein Strom)

$T_c = T_c(M)$ mit M: Ionenmasse (Isotopeneffekt)

$\Rightarrow$ Elektron – Phonon WW ist.

Erklärung: eff Elektron – Elektron WW gebunden Cooperpaare erzeugt

Startpunkt:

Wir müssen wissen, welcher Anteil der Elektron – Elektron WW am stärksten ist, Folgende Beiträge

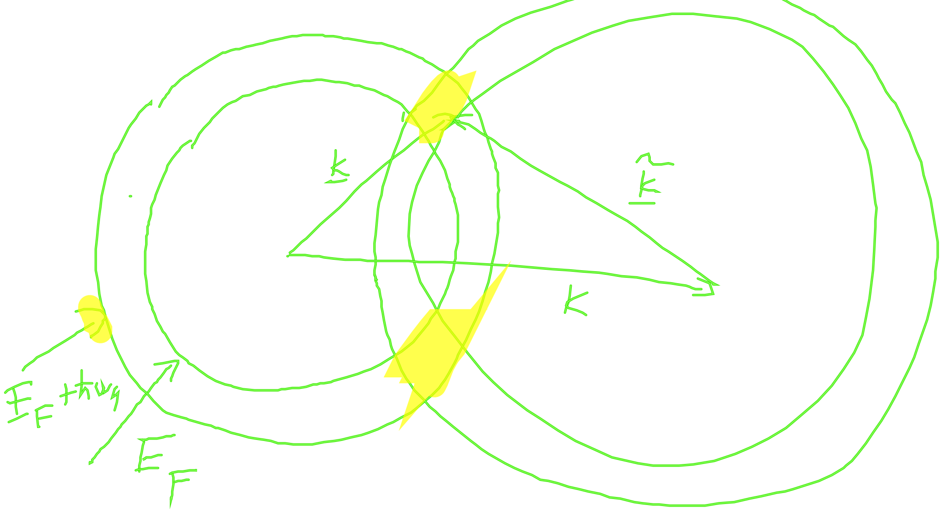
(1) $V_{k,\tilde{q}} \approx -V_0 \Leftarrow$ ungefähr konstant

Nur der Bereich, wo die WW anziehend ist.

Also nah an der Fermi-Kante.

(2) Wir nehmen nur den Fall $k = -\tilde{k}$ mit.

Also Paare mit verschwindendem Impuls $K = k + \tilde{k} \approx 0$



Wechselwirkung kann nur außerhalb der Fermikugel erfolgen, dort mit $E_k \leq E_F + \hbar\omega_q$ anziehend!

Aber:

$$H_{WW} = -V_0 \sum_{kq\sigma} a^+_{k+q,\sigma} a^+_{-k-q,-\sigma} a_{-k,-\sigma} a_{k\sigma}$$

σ: Spin

Mit der Nebenbedingung $V_0 \neq 0$ für $|E(k+q) - E(k)| \leq \hbar\omega_D$

sowie $H_0 = \sum_{k\sigma} E(k)\, a^+_{k\sigma} a_{k\sigma}$

Erinnerung an die statistische Physik, großkanonische Potential (Variation der Teilchenzahl!)

$$\Rightarrow H \rightarrow H - E_F N$$

$$\Rightarrow H_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon(\underline{k})\, a^+_{k\sigma} a_{k\sigma}$$

$$\varepsilon(k) = E(k) - E_F$$

Zunächst WW außer acht lassen.

Ansatz für neue Quasiteilchen:

$$\alpha_{k\sigma} = u_k a_{k\sigma} - v_k a^+_{-k-\sigma}$$

$$\alpha^+_{k,\sigma} = u_k a^+_{k\sigma} - v_k a_{-k-\sigma}$$

$$\alpha_{-k,-\sigma} = u_k a_{-k,-\sigma} + v_k a^+_{k\sigma}$$

$$\alpha^+_{-k,-\sigma} = u_k a^+_{-k,-\sigma} + v_k a_{k\sigma}$$

Mit der Bedingung $u_{k\sigma}^2 + v_{k\sigma}^2 = 1$

und $u_{k\sigma} = u_{-k-\sigma}$ $\quad v_{k\sigma} = -v_{-k,\sigma}$

bleiben Fermi Vertauschungsrelationen erhalten.

(Bogoliubov Transformation)

Schauen wir uns H_0 an:

$$a_{k\sigma} = u_k \alpha_{k\sigma} + v_k \alpha^+_{-k-\sigma}$$
$$a^+_{k\sigma} = u_k \alpha^+_{k\sigma} + v_k \alpha_{-k-\sigma}$$
$$a_{-k-\sigma} = u_k \alpha_{-k,-\sigma} - v_k \alpha^+_{k\sigma}$$
$$a^+_{-k-\sigma} = u_k \alpha^+_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma}$$

$$\Rightarrow H_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) \left(a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} + a^+_{-k-\sigma} a_{-k-\sigma} \right)$$

$$= \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) \Big((u_k \alpha^+_{k\sigma} + v_k \alpha_{-k-\sigma})(u_k \alpha_{k\sigma} + v_k \alpha^+_{-k-\sigma})$$
$$+ (u_k \alpha^+_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma})(u_k \alpha_{-k-\sigma} - v_k \alpha^+_{k\sigma}) \Big)$$

$$= \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) \Big(2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(\alpha^+_{k\sigma}\alpha_{k\sigma} + \alpha^+_{-k\sigma}\alpha_{-k\sigma})$$
$$+ 2 u_k v_k (\alpha^+_{k\sigma}\alpha^+_{-k\sigma} + \alpha_{-k\sigma}\alpha_{k\sigma}) \Big)$$

Die Idee ist, dass die α Operatoren Anregungen aus dem Grundzustand beschreiben (Ersatzvakuum).

Also $\alpha_{k\sigma} |0\rangle = 0$.

Wenn wir alle α vernichten im Vakuumzustand sollten wir den Grundzustand erhalten!

$$\prod_k \alpha_{k\sigma} \alpha_{-k-\sigma} |vac\rangle = \prod_k (u_k a_{k+} - v_k a^+_{k-})(u_k a_{k-} + v_k a^+_{k+}) |vac\rangle$$

$$= \prod_k \Big(u_k^2 \cancel{a_{k+} a_{k-}} + u_k v_k (\underbrace{a_{k+} a^+_{k+}}_{1 - \cancel{a^+_{k+} a_{k+}}} - \cancel{a^+_{k-} a_{k-}})$$
$$+ v_k^2 a^+_{k+} a^+_{k-} \Big) |vac\rangle$$

$$= \prod_k \left(u_k v_k + v_k^2 a_{k+}^+ a_{k-}^+ \right) |vac\rangle$$

Achtung der Zustand ist nicht normiert!

$$\Rightarrow \quad |0\rangle = \prod_k \left(u_k + v_k a_k^+ a_{-k}^+ \right) |vac\rangle$$

Wir müssen u_k, v_k, so wählen, dass $H_0 |0\rangle$ minimal ist.

$$H_0 = \sum_k \varepsilon(k) \Big(2 u_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) \left(\alpha_{k+}^+ \alpha_{k+} + \alpha_{-k-}^+ \alpha_{-k-} \right)$$
$$+ 2 u_k v_k \left(\alpha_k^+ \alpha_{-k-}^+ + \alpha_{-k-} \alpha_k \right) \Big)$$

Wechselwirkung soll verschwinden

$$2 u_k v_k \left(\alpha_k^+ \alpha_{-k-}^+ \alpha_k \right) |0\rangle = 0$$

Falls $u_k v_k = 0$ 1. Forderung!

$$(u_k^2 - v_k^2) \left(\alpha_{k+}^+ \alpha_{k+} + \alpha_{-k-}^+ \alpha_{-k-} \right) |0\rangle \text{ auch } 0$$

$u_k^2 - v_k^2 = 0$ vergessen!

Beweis: $\sum_k \varepsilon(k)\, 2 v_k^2$

Setze $v_k = 1$ für $k \le k_F$

und $v_k = 0$ für $k > k_F$ minimiere Energie

Wichtig wegen $N = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = \sum_k 2v_k^2$ wird dann durch die Teilchenzahl fixiert.

Jetzt für Wechselwirkendes System betrachten:

Also:

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon(k)\,(a^\dagger_{k\sigma} a_{k\sigma}) - V_0 \sum_{kq\sigma} a^\dagger_{k+q\sigma} a^\dagger_{-k-q-\sigma} a_{-k-\sigma} a_{k\sigma}$$

Transformieren auf α, α^+ Operatoren!

$$H = \sum_k \varepsilon(k)\Big(2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(\alpha_k^+\alpha_k + \alpha_{-k}^+\alpha_{-k}) + 2u_k v_k(\alpha_k^+\alpha_{-k}^+ + \alpha_{-k}\alpha_k)\Big)$$

$$- V\sum_{kk'}\Big[u_k v_k u_{k'} v_{k'}(1 - \alpha^+_{-k'}\alpha_{-k'} - \alpha_{k'}^+\alpha_{k'})(1 - \alpha^+_{-k}\alpha_{-k} - \alpha_k^+\alpha_k)$$

$$+ (u_k^2 - v_k^2)\,u_{k'} v_{k'}(1 - \alpha^+_{-k'}\alpha_{-k'} - \alpha^+_{k'}\alpha_{k'})(\alpha_{-k}\alpha_k + \alpha_k^+\alpha_{-k}^+)$$

$$+ (u_k^2\alpha_{-k}\alpha_k - v_k^2\alpha_k^+\alpha_{-k}^+)(u_k^2\alpha_k^+\alpha_{-k}^+ - v_k^2\alpha_{-k'}\alpha_{k'})\Big]$$

Wir wenden den Grundzustand darauf an:

$$H|\phi_0\rangle = \Big[2\sum_k \varepsilon(k)\,v_k^2 - V\sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} + \sum_k \Big[\underbrace{2u_k v_k\,\varepsilon(k) - (u_k^2 - v_k^2)\,V\sum_{k'} u_{k'} v_{k'}}_{(*)}\Big](\alpha_k^+\alpha_{-k}^+ + \alpha_{-k}\alpha_k)\Big]|\phi_0\rangle$$

Damit α gute nicht WW Teilchen sind:

$$\sum_{k'} u_{k'} v_{k'} =: \frac{\Delta}{V}$$

Für $T=0$ muß dann

$$2 u_k v_k \varepsilon(k) = \Delta \left(u_k^2 - v_k^2\right)$$ sein

Ansatz

$$u_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \xi_k\right) \quad \text{und} \quad v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \xi_k\right)$$

erfüllt $u_k^2 + v_k^2 = 1$!

$$\xi_k = \frac{\varepsilon(k)}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

Wir müssen noch Δ bestimmen!

$$\Delta = V \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} = \frac{V}{2} \sum_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$$

$$= \frac{V}{2} \sum_k \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V}{2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_{-\hbar\omega_{ph}}^{\hbar\omega_{ph}} d\varepsilon \, \underbrace{Z(\varepsilon)}_{\text{Zustandsdichte}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

Nach Δ umstellen $\quad Z(\varepsilon) \approx Z(\varepsilon_F)$

$$1 = V_0 Z_0 \, \mathrm{Arcsinh}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = \hbar\omega_D \frac{1}{\sinh \frac{1}{V_0 Z_0}} \underset{V_0 \text{ klein}}{\approx} 2\hbar\omega_D \, e^{-\frac{1}{V_0 Z_0}}$$

Das Ergebnis gibt es nicht in Störungstheorie! (unendlich viele Potenzen)

Δ stellt sich als Bindungsenergie heraus!

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Energie abgesenkt wird.!