Ergebnis der Näherungen

- Maxwell-Gl. + Modenansatz
- Schrödinger Gl. für 2-Niveau System (lokal)
- RWA, SVEA

▷ makroskopische Gleichungen im homogenen Medium

μ_{12}, $u_\lambda(x_n)$ nicht n-abhängig

Ort des 2-Niveau Systems

$$\dot{E}_\lambda^\pm = (\mp i\omega_\lambda - k_\lambda)\, E_\lambda^\pm \pm i \frac{1}{2\varepsilon_0} \bar{\omega}\, P_\lambda^\pm$$

$k_\lambda = \frac{\sigma_\lambda}{2\varepsilon_0}$ optische Verlustrate

$$\dot{\underline{p}}^+ = (-i\bar{\omega} - \gamma)\, \underline{p}^+ + \frac{1}{i\hbar} \sum_\lambda E_\lambda^+ (u_\lambda \underline{e}_\lambda \underline{\mu}_{21})\, \underline{\mu}_{12}\, D$$

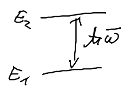
$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T_1} - \frac{2}{i\hbar} \sum_\lambda \left(u_\lambda \underline{e}_\lambda \left(E^+ \underline{p}^- - E^- \underline{p}^+ \right)\right)$$

$$P_\lambda^+ = \int u_\lambda(x)\, \underline{e}_\lambda\, \underline{P}^+\, dx$$

$$= \int dx\, u_\lambda(x)\, \underline{e}_\lambda \sum_n \delta(x - x_n)\, \underline{\mu}_{21}^n\, p_n$$

$$\left[\; P_\lambda^+ = \sum_n u_\lambda(x_n)\, \underline{e}_\lambda\, \underline{\mu}_{21}^n\, p_n \;\right]$$

↑ WW mit Resonatormoden aber keine direkte WW der Lichtmoden untereinander



Falls Medium inhomogen (nicht alle Atome identisch)

lokale Gleichungen für p_n und d_n

$$(\text{III}') \quad \dot{p}_n = -i\bar{\omega} p_n - \gamma p_n - \frac{1}{i\hbar} E_n(t)\, \underline{\mu}_{21}^n\, d_n$$

$$(\text{IV}') \quad \dot{d}_n = \frac{2}{i\hbar}\left(E_n^+ \underline{\mu}_{12}^{n*}\, p_n^* - c.c. \right) + \frac{d_0 - d}{T}$$

Bemerkung:
- In 2. Quantisierung mit klass. Feld, werden die Gleichungen über Fundamentalrelation abgeleitet
$$\frac{d}{dt}\langle \hat{F} \rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \right\rangle$$

Besetzung $f^2 = \langle a_2^+ a_2 \rangle$

$f^1 = \langle a_1^+ a_1 \rangle$

$d = f^2 - f^1$

$p = \langle a_1^+ a_2 \rangle$

$p^* = \langle a_2^+ a_1 \rangle$

wobei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{opt}$

$\hat{H}_0$: $E_2 a_2^+ a_2 + E_1 a_1^+ a_1$ $\qquad$ $\hat{H}_{opt}$: $\underline{\mu}\, \underline{E}(t)\, (a_2^+ a_1 + a_1^+ a_2)$

=> es folgen identische Gleichungen wie III', IV'

- Mit zusätzlich quantisiertem Lichtfeld: kann spontane Emission beschrieben werden über WW mit Vakuumfluktuationen der leeren Kavität

Jaynes-Cummings Hamiltonian (RWA)

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega c^+ c + \frac{1}{2}\hbar\bar{\omega}\,\hat{\sigma}_z + \hbar g\,(\hat{\sigma}_+ \hat{c} + \hat{\sigma}_- \hat{c}^+)$$

↑ Photon Erzeuger

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Auf und Absteiger Operatoren im Atom
$$\left.\begin{aligned} \sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Dimensionslose Formulierung der Lasergleichung

$$E_\lambda^+(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, a_\lambda(t)$$

$$E_\lambda^-(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, a_\lambda^*(t)$$

motiviert durch Übergang zur QM Beschreibung

↳ $a_\lambda^* a_\lambda$ ergibt die Photonenzahl und $|E_\lambda|^2$ die Intensität

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{a}_\lambda &= (\underbrace{-i\omega_\lambda}_{\text{osz}} - \underbrace{\kappa_\lambda}_{\text{Dämpf.}})\, a_\lambda - \underline{i\sum_n g_{\lambda n}^* p_n} \quad \text{Antrieb durch Polarisation} \\ \dot{p}_n &= (\underbrace{-i\bar{\omega}_n}_{\text{osz.}} - \underbrace{\gamma}_{\text{Dämpf.}})\, p_n + \underline{i\sum_\lambda g_{\lambda n}\, a_\lambda\, d_n} \\ \dot{d}_n &= \underbrace{\frac{d_0 - d}{T_1}}_{\text{Pump+Verluste}} + \underline{2i\sum_\lambda \left(g_{\lambda n}^*\, p_n\, a_\lambda^* - c.c.\right)} \quad \text{Kopplung an Licht} \end{aligned}}$$

mit $g_{\lambda n} := i\mu_{21}^n\, \underline{e}_\lambda\, u_\lambda(x_n)\sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar 2\varepsilon_0}}$

$$\left(\underline{E}(x,t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, \underline{e}_\lambda\, u_\lambda(x) \right)$$

$$\underline{E}_n(t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, \underline{e}_\lambda\, u_\lambda(x_n)$$

mit Zahl Moden λ M, und Zahl der Atome N, sind das $2N+M$ gekoppelte DGLs

5.3. Stationäre Lösungen im Ein-Moden Betrieb

Grundgleichungen (eine Mode)

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}'') \quad & \dot{a} = (-i\omega - \kappa)\, a - i\sum_n g_n^* p_n \\ (\mathrm{III}'') \quad & \dot{p}_n = (-i\bar{\omega}_n - \gamma)\, p_n + i g_n d_n a \\ (\mathrm{IV}'') \quad & \dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T_1} + 2i\left(g_n^* p_n^* a - c.c.\right) \end{aligned}$$

← Feldamplitude der Mode λ mit $\omega_\lambda = \omega$, $\kappa_\lambda = \kappa$

$g_{\lambda n} = g_n$

↑ Frequenz des leeren Resonators

Fixpunkte

(i) $a = 0$, $p_n = 0$, $d_n = d_0$ unterhalb der Schwelle stabil

(ii) Ansatz

$$a(t) = a^{ss}\, e^{-i(\Omega_L t + \varphi)}$$

$$p_n(t) = p_n^{ss}\, e^{-i(\Omega_L t + \varphi)}$$

$$d_n = d_n^{ss}$$

$(a^{ss})^2 = a(t)a^*(t) = \text{const.}$

d.h. <u>konstante</u> Intensität (oder Photonenzahl)

$p_n^{ss} = \text{const}$; $a^{ss} = \text{const}$

Ω_L Laserfrequenz der Lösung

Einsetzen in $(\mathrm{I}'' - \mathrm{III}'' - \mathrm{IV}'')$

$$\mathrm{III}'' \rightarrow p_n^{ss} = \frac{-g_{\lambda n}\, d_n^{ss}\, a^{ss}}{\Omega_L - \bar{\omega}_n + i\gamma}$$

$$(*_1) \quad d_n^{ss} = \frac{d_0}{1 + 2T_1\, G_{\lambda n}\, (a^{ss})^2} \qquad \text{mit} \quad G_{\lambda n} = |g_{\lambda n}|^2\, \frac{2\gamma}{(\Omega_L - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}$$

↑

Einstein Koeffizient der stimulierten Emission
(jetzt mikroskopisch aus Materialparametern bekannt)

[Vergleich mit 4.1. Ratengleichungen:
aus dimensionsbehafteter Inversionsgl. folgt

$$\bar{D}^{ss} = \frac{\bar{D}_0}{1 + 2GT_1N_{ph}}$$

mit $G = G_{\lambda n}$ da nur eine Mode in Ratengleichung und keine Inhomogenität]

Einsetzen von p_n^{ss} in (I') und separieren nach Real- und Imaginäranteilen

$$\text{Re:}\quad \left[-\kappa + \sum_n |g_{\lambda n}|^2 \frac{\gamma}{(\Omega_L - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2} d_n^{ss}\right] a^{ss} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\kappa + \sum_n \frac{1}{2} G_{\lambda n} d_n^{ss}\right) a^{ss} = 0$$

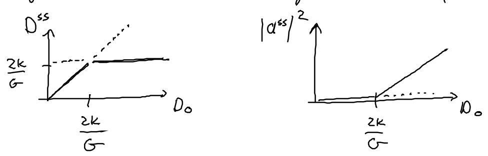
[Falls homogenes Medium folgt $\quad -\kappa + \frac{1}{2} G D^{ss} = 0$

$\frac{1}{2\kappa} = \tau_{ph}$ $\qquad D^{ss} = \frac{2\kappa}{G} = \frac{1}{\tau_{ph}G}$

d.h. $D = G\tau_{ph}D^{ss} = 1$]

gleiche stationäre Lösungen für D^{ss} und $|a^{ss}|^2$

aus $*_1$: $\quad a_{ss}^2 = \frac{D_0 G\tau_{ph} - 1}{2T_1G}$



aus $(*_1)$

<u>Imaginärteil</u> von (I') Gleichung

$$\left(\Omega_L - \omega + \sum_n |g_{\lambda n}|^2 \frac{\Omega_L - \bar{\omega}_n}{(\Omega_L - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2} d_n^{ss}\right) a^{ss} = 0$$

falls homogenes Medium vorliegt:
(Einsetzen der Re-Gleichung)

$$\boxed{\omega - \Omega_L = -\frac{\bar{\omega} - \Omega_L}{\gamma} 2\kappa}$$

$$\boxed{\Omega_L = \underbrace{\omega \frac{\gamma}{\gamma + \kappa}}_{\text{leerer Resonator}} + \underbrace{\bar{\omega} \frac{\kappa}{\gamma + \kappa}}_{\text{2 Niveau System}}}$$

← Aussage über Laserfrequenz Ω_L im Laserbetrieb

- Die Modenfrequenz des leeren Resonators ω durch WW von Licht + Materie zu Ω_L verschoben.
- Verschiebung wächst wenn κ und γ auf gleicher Zeitskala liegen
- falls $\gamma \gg \kappa$ $\qquad$ "Photonen leben länger als Polarisation"

$\Rightarrow \Omega_L = \omega$

- keine Verschiebung
- Ratengleichungsfall

Bem.: für inhomogene Medien hängt die Frequenzverschiebung $\omega - \Omega_c$ zusätzlich von der Inversion, d.h. von der Intensität $(\alpha^{ss})^2$ ab!

Amplituden – Phasen – Kopplung