

1.2. Stabilität und Langzeitverhalten (Fortsetzung)

1.2.1. Kriterien für Stabilität

1) Kriterium für Lyapunov Stabilität (lokal)

Wenn \underline{x}^* stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DE)_{\underline{x}^*}$ einen positiven Realteil.

2) Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität

Alle Eigenwerte haben negativen Realteil.

Bsp. Fixpunkt α) vom Pendel ohne Reibung
Bsp. Fixpunkt α) vom Pendel mit Reibung

Für allgemeine Systeme mit $n=2$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x}_1 \\ \dot{\delta x}_2 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta x_i = x_i - x_i^* \\ \underline{A} = DE|_{\underline{x}^*}$$

$$0 = \det(\underline{A} - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}}_{\det \underline{A}} - \lambda \underbrace{(A_{11} + A_{22})}_{\text{tr } \underline{A}} + \lambda^2$$

$$= \det \underline{A} - \text{tr } \underline{A} \lambda + \lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr } \underline{A} \pm \sqrt{(\text{tr } \underline{A})^2 - 4 \det \underline{A}} \right)$$

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2$$

Fallunterscheidung

a) Stabiler Fokus

$$; \quad \text{tr } A < 0, \quad \det A > 0$$

(komplexer Eigenwert)
negativer Realteil

$$(\text{tr } A)^2 < 4 \det A$$

$$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$$

$$(\lambda_0, \omega > 0)$$



gedämpfte
Oszillation

(b) instabiler Fokus : $\text{tr} A > 0$, $\det A > 0$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$$

$$(\text{tr} A)^2 < 4 \det A$$

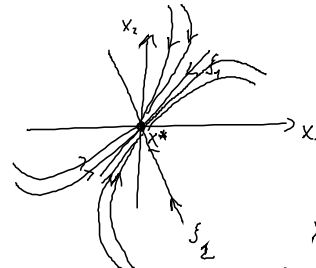


entkämpfte
Oszillation

(c) stabiler Knoten : $\text{tr} A < 0$, $\det A > 0$

reelle Eigenwerte
 $\lambda_1 < 0$
 $\lambda_2 < 0$

$$(\text{tr} A)^2 > 4 \det A$$

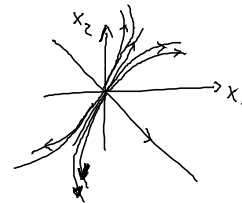


$\lambda_1 < \lambda_2$
 ξ_2 schnelle
Richtung

(d) instabiler Knoten : $\text{tr} A > 0$, $\det A > 0$

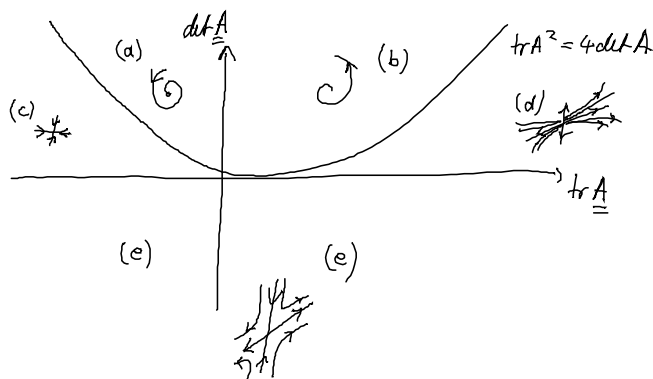
$\lambda_1 > 0$
 $\lambda_2 > 0$

$$(\text{tr} A)^2 > 4 \det A$$



(e) Sattelpunkt : $\det A < 0$

$\lambda_1 < 0$
 $\lambda_2 > 0$



Grenzen zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle

- lineare Stabilitätsanalyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpunkt nötig

$\text{tr} A = 0$, $\det A > 0$: entweder Zentrum  oder schwach stabiler/instab. Fokus

- qualitative Änderung im Verhalten des Flusses

→ Bifurkationen $\hat{=}$ Verzweigung der Lösungsmanigfaltigkeit

1.2.2. Hamilton'sche Vektorfelder - Phasenraumvolumen

$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ $\begin{matrix} f \text{ Freiheitsgrade} \\ \text{z.f. dynamische Größen} \end{matrix}$ → Phasenraum ist $2f$ dimensional

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k$$

$$x_i = \{ q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f \}$$

$$\dot{x} = \underline{F}(x) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \quad \underline{F}$$

$$\text{tr} \underline{A} = \text{div} \underline{F} = \sum_{k=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k}}_{\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k}}_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \right) = 0$$

→ aus $\text{tr} \underline{A} = 0 = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass keine asymptotische Stabilität möglich ist, sondern Lyapunov-Stabilität.

Beweis: Falls asymptotisch stabil müssen alle $\text{Re} \lambda_i < 0$

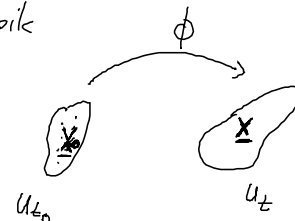
$$\rightarrow \text{tr} \underline{A} = \sum_i \text{Re} \lambda_i + i \underbrace{\sum_i \text{Im} \lambda_i}_{0} < 0$$

↓
komplex konjugiert

- Falls $f=1$ ($n=2$): Fixpunkte können nur Zentren (falls $\det A > 0$) oder Sattelpunkte sein (falls $\det A < 0$).

- für Hamilton'sche Systeme aus $\text{tr} \underline{A} = \text{div} \underline{F} = 0$ der Liouville'sche Satz der klass. statistischen Physik

"Phasenraumvolumen ist erhalten"



Beweis: V_t : Phasenraumvolumen

$$u_{t_0} \equiv u_t$$

$$V_t = \int_{u_{t_0}} d^{2f} x = \int_{u_{t_0}} d^{2f} x_0 \boxed{\det D \phi_t(x_0)}$$

↓

[zu zeigen: $\frac{d}{dt} V_t = 0$]

$$\phi_t(x_0) = x(t)$$

$$D \phi_t(x_0)_{ki} = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right)$$

Taylor für kleine Zeitänderung $(t-t_0)$

$$\approx \underbrace{\frac{\partial x^i(t_0)}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0^k} F_i}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + (t-t_0) \dots & 0 + (t-t_0) \dots & \dots \\ 0 + (t-t_0) \dots & 1 + (t-t_0) \dots & \\ 0 + & & 1 + \dots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\det D \phi_t(x_0) = 1 + \sum_{i=1}^{2f} (t-t_0) \frac{\partial}{\partial x_0^i} F_i + \mathcal{O}(t-t_0)^2$$

$$V_t = \int_{u_{t_0}} d^{2f} x_0 \left[1 + (t-t_0) \underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}}_{(\operatorname{div} \underline{F})_{x_0}} + \mathcal{O}(t-t_0)^2 \right]$$

$$V_t = V_{t_0} + (t-t_0) \int_{u_{t_0}} d^{2f} x_0 (\operatorname{div} \underline{F})_{x_0} + \mathcal{O}(t-t_0)^2$$

$$\operatorname{div} \underline{F} = \operatorname{tr} \underline{A}$$

$$\frac{d}{dt} V_t = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int d^3 x_0 \underbrace{(\operatorname{div} \underline{F})_{x_0}}_{= 0 \text{ für Hamilton'sche Systeme}} = 0 \quad \blacksquare$$

Phasenraumvolumina erhalten, d.h. Fluss inkompressibel falls $\operatorname{div} \underline{F} = 0$,