Fortsetzung : Linienbreite mit Feedback (6.4.2.)

- Class A laser → Linearisieren der Ratengleichung
  - ein Eigenwert mit Eigenrichtung in Richtung der Phase ist Null $\hat{=}$ Neutrale Eigenmode

  Linienbreite $\Delta\omega = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sigma^2_{\Delta\phi\phi}$ [Herleitung über Autokorrelation des E-Feldes]

  Varianz der Phasendynamik

  <–> Effektive Phasengleichung

  $$\dot{\Delta\phi} = D\sqrt{1+\alpha^2}\,\frac{1}{A_c}\,\xi^b$$

  Rauschstärke

  Amplitude im steady state

  Gauß'sches Rauschen

- $\alpha = 0$, Class A laser mit Feedback

  Effektive Phasengleichung durch Entwicklung des Feedback-Term (cosinus) für Phasen nahe des steady states $\tau\dot{\Delta\phi} \approx 0$ wenn $\Delta\phi$ im rotating frame der Kavitätsmode

  $$(\Delta\phi = \phi - \omega t) \qquad \dot{\Delta\phi} = \frac{D}{A_c}\,\frac{1}{1+\tau k\cos(\omega_c\tau)}\,\xi^b = \frac{D^{eff}}{A_c}\,\xi^b$$

  ω_c: Modenfrequenz der ECM

  → Linienbreite $\Delta\omega = \frac{D^{eff^2}}{A_c^2}$

  $$\Delta\omega = \frac{D^2}{A_c}\,\frac{1}{(1+\tau k\cos\omega_c\tau)^2}$$

- Class B laser mit Feedback

  [VL vom 23.1.]

  $$\dot{I} = 2nI + 2k\sqrt{I(t-\tau)I(t)}\,\cos\left(\Delta_{\omega_0}\phi(t-\tau) - \Delta_{\omega_0}\phi(t) - \omega_0\tau\right)$$

  $$\dot{\Delta_{\omega_0}\phi} = \alpha n + k\sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I(t)}}\,\sin\left(\Delta_{\omega_0}\phi(t-\tau) - \Delta_{\omega_0}\phi(t) - \omega_0\tau\right) \qquad \Delta_{\omega_0}\phi = \phi - \omega_0 t$$

  $$\dot{n} = \frac{\tau_{ph}}{T_1}\left(J - n(1+2n)I\right)$$

  ECM Lösungen (I_c, ω_c, n_c)

  $n_c = -k\cos\omega_c\tau$

$\Rightarrow$ Phasengleichung mit Feedback

$$\Delta_{\omega_0}\dot{\phi} = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c}\xi^b - k\sin\left(\Delta_{\omega_0}\phi(t) - \Delta_{\omega_0}\phi(t-\tau) + \omega_0\tau\right)$$
$$\overset{(\alpha n)}{-\alpha k\cos\omega_c\tau}$$

im steady state $\omega_c t$

$\downarrow$

$\Delta\phi = \phi - \omega\tau$

Wechsel des rotating frames zu ω_c

$-\frac{d}{dt}\Delta\phi \approx \frac{\Delta\phi(t-\tau)-\Delta\phi(t)}{\tau}$

$$\Delta\dot{\phi} - \omega_c + \omega_0 \approx \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c}\xi^b - k\sin\left(\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau) + \omega_c\tau\right)$$
$$-\alpha k\cos\left(\underbrace{\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau)}_{\Delta\dot{\phi}\tau} + \omega_c\tau\right)$$

klein im steady state

$$= \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c}\xi^b + k\sqrt{1+\alpha^2}\sin\left(\underbrace{-\Delta\phi(t) + \Delta\phi(t-\tau)}_{-\Delta\dot{\phi}\tau} - \omega_c\tau - \arctan\alpha\right)$$

Entwicklung um $\omega_c\tau + \arctan\alpha$ für kleine $-\tau\Delta\dot{\phi}$

$$\Delta\dot{\phi} - \omega_c + \omega_0 = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A}\xi^b + k\sqrt{1+\alpha^2}\sin(\omega_c\tau + \arctan\alpha) - k\sqrt{1+\alpha^2}\,\tau\Delta\dot{\phi}\cos(\omega_c\tau + \arctan\alpha)$$

- Bestimmungsgleichung für ECM-Frequenz
  $\omega_c - \omega_0 = -k\sqrt{1+\alpha^2}\sin(\omega_c\tau + \arctan\alpha)$

$$\Rightarrow \quad \Delta\dot{\phi} = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A^c}\xi^b - \Delta\dot{\phi}\left(k\sqrt{1+\alpha^2}\,\tau\cos(\omega_c\tau + \arctan\alpha)\right)$$

$$\boxed{\Delta\dot{\phi} \approx \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A^c}\,\frac{1}{1 + k\tau\sqrt{1+\alpha^2}\cos(\omega_c\tau + \arctan\alpha)}\,\xi^b}$$

Random Walk mit veränderter Rauschstärke

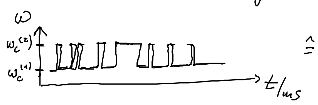
$$\Delta\omega = \frac{D^2(1+\alpha^2)}{A_c^2}\,\frac{1}{\left(1 + k\tau\sqrt{1+\alpha^2}\cos(\omega_c\tau + \arctan\alpha)\right)^2}$$

- Breite der Lorentzkurve der Laseremission wird durch α vergrößert und durch Feedback bei geeigneten Delaylängen τ verkleinert.

- Voraussetzung für Herleitung:
  - kleine τ
  - stabile Emission auf einer Mode ω_c
  - kleine (vernachlässigbare) Fluktuationen in A_c und n_c

6.4.3 Mode-Hopping zwischen Externen Kavitätsmoden

- Experimentell wird mode-hopping zwischen verschiedenen steady state Lösungen (ECM), also zwischen ω_c's, beobachtet.



$\hat{=}$ Switching

Kleiner Exkurs zur Fokker Planck Gleichung

Fokker Planck Gleichung
$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)} p + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)} p(x,t)$$

$p(x,t)$: Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

$D^{(1)}$: Driftkoeffizient

$D^{(2)}$: Diffusionskoeffizient

[Herleitung aus Master Gleichung mit Betrachtung der Quellen + Senken, + Markov + Taylor Entwicklung in x]

1D Wahrscheinlichkeitsfluss
$$J = \left(D^{(1)} - D^{(2)} \frac{d}{dx} \right) p(x,t)$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{d}{dx} J = 0$$

Stationäre Lösungen : (Randbedingungen $p \to 0$ für $x \to \pm\infty$, $J \to 0$ für $x \to \pm\infty$)

$\dot{p} = 0 \quad \to J = \text{const}$

$\to \boxed{D^{(2)} \frac{dp}{dx} = D^{(1)} p} \xrightarrow{\text{Lösung}} p(x) = \underset{\text{Normierung}}{N}\, e^{-\frac{V(x)}{D^{(2)}}}$

mit $V(x) = -\int_{x_0}^{x} D^{(1)}(x)\,dx$

$D^{(2)}$ nicht von x-abhängig

$D^{(1)}(x)$ ist x-abhängig

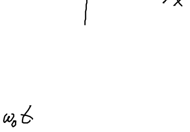
- Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt dem Potenzial $V(x)$ ähnlich einer Boltzmann Verteilung
- $V(x)$ gegeben durch Driftkoeffizienten

Äquivalente Langevin Gleichung : $\dot{x} = D^{(1)} + \overbrace{\sqrt{2D^{(2)}}\, \xi(t)}^{F}$

- Zufallskraft F schiebt Teilchen im Potenzial $V(x) = -\int_{x_0}^{x} D^{(1)}(x)\,dx$ an, anschließend Relaxation ins Gleichgewicht.

- Bsp. Lineare SDE $\quad \dot{x} = ax + b\xi(t)$

$\longrightarrow V(x) = -\int_{x_0}^{x} ax\,dx$



- Bsp. Laser mit Feedback im rotating frame ω_0 $\quad \underset{\omega_0}{\delta\phi} = \phi - \omega_0 t$

$$\underset{\omega_0}{\Delta}\dot{\phi} = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A^c}\xi^b + k\sqrt{1+\alpha^2}\,\sin\Big(\underbrace{\underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t-\tau) - \underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t)}_{\Delta} - \omega_0\tau - \arctan\alpha\Big)$$

=> Einführen der Variable Δ:

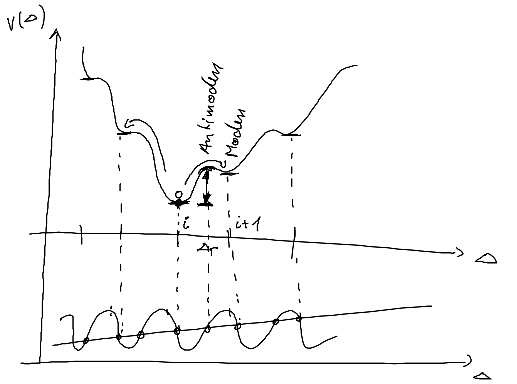
$$\frac{d}{dt}\Delta = \frac{d}{dt}\Big[\underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t-\tau) - \underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t)\Big] = \underbrace{\frac{d}{dt}\underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t-\tau)}_{\approx -\frac{\Delta}{\tau}} - \underset{\omega_0}{\Delta}\dot{\phi}$$

$$\left[\frac{\Delta}{\tau} = \frac{\underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t-\tau) - \underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t)}{\tau} \approx -\frac{d}{dt}\underset{\omega_0}{\Delta}\phi(t-\tau)\right]$$

$$\rightarrow\; -\dot{\Delta} = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c}\xi^b + k\sqrt{1+\alpha^2}\,\sin(\Delta \underbrace{-\omega_0\tau - \arctan\alpha}_{C}) + \frac{\Delta}{\tau}$$

$$\boxed{\dot{\Delta} = -\frac{dV(\Delta)}{d\Delta} + \underbrace{\frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A^c}}_{\sqrt{2D^{(2)}}}\xi^b}$$

mit $V(\Delta) = \frac{1}{2\tau}\Delta^2 - k\sqrt{1+\alpha^2}\cos(C+\Delta)$



• Minima von $V(x)$: $\frac{dV}{d\Delta} = 0$

$$k\sqrt{1+\alpha^2}\sin(\Delta + C) + \frac{\Delta}{\tau} = 0$$

≙ Bestimmungsgleichung für ECMs
d.h. Minima entsprechen ECM-Frequenzen

Switching zwischen Potenzialtöpfen kann mit Kramers-Escape berechnet werden

$$T_{i,i+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{|V''(0)V''(\Delta_r)|}}\, e^{\frac{|V(\Delta_r) - V(0)|}{2D^{(2)}}}$$

"Verweildauer in Mode i"

, hängt exponentiell von Barrierenhöhe und ist maximal für Mode mit kleinsten Linienbreite
$\Delta\omega = D^{(2)}$

Ende