Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern
- " von kleinen äußeren Störungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss

Qualitative Dynamik: Fluss als Ganzes
Stabilität
topologische Struktur

1.1. Vektorfelder als dynamische Systeme

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ → dynamische Variablen

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Vektorfeld

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlinearen) DGL 1. Ordnung formulieren.

Bsp. deterministisches System
z.B. Newton'sche Bewegungsgleichung mit Reibung

$$\ddot{y} + f_1(y,t)\,\dot{y} + f_2(y,t) = 0$$

Reibung Kraft

$x_1 := y$
$x_2 := \dot{y}$

$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -f_1(x,t)\,x_2 - f_2(x,t)$

speziell Hamilton'sche Systeme

$x_1 = q \qquad \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p}$

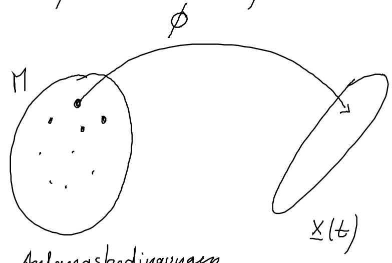
$x_2 = p \qquad \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q}$

$H(q,p)$ Hamiltonfunktion

- Fluss des Vektorfeldes $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M (Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\phi : M \times \mathbb{R}_t \longrightarrow M$$

mit $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t, \underline{x}_0)$



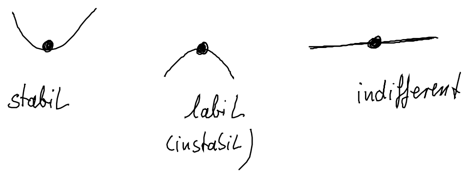
Anfangsbedingungen $\underline{x}_0$

Gesamtheit aller Bahnkurven = Trajektorien

- Fixpunkte $\underline{x}^*$ des autonomen dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$
  $\hat{=}$ stationäre Punkte, Gleichgewichtspunkte, singuläre Punkte, krit. Punkte

(1) $$0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \longrightarrow \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes:



Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen
$\Downarrow$
$\delta\underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$

Taylor Entw. $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $$\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

$$\delta\dot{\underline{x}} = (DF)_* \, \delta\underline{x}$$ mit Jacobi-Matrix DF

Lineare Gleichung

System von lin. DGL mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz $\delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t}$ $\longrightarrow$ $\lambda \underline{\xi} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\xi}$ Eigenwertgleichung

$\underline{\underline{A}} = (DF)_{\underline{x}^*}$

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = 0$

λ_k : Eigenwerte

$\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren

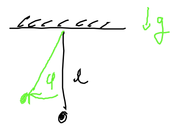
$\rightarrow$ allgemeine Lösung

$$\delta \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \underset{\sim}{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k

c_k durch AB bestimmt)

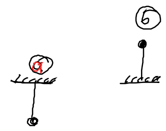
Bsp: (i) Ebenes Pendel (ohne Reibung)



$$m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin\varphi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 &= -m g l \sin x_1 \end{aligned}$$

Fixpunkte : $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x_2 = 0$ ⓐ, $x_1 = n \cdot \pi$ ⓑ



Linearisierung:
$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/ml^2 \\ -mgl\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{DF(\underline{x})} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

ⓐ $x_1 = x_2 = 0$

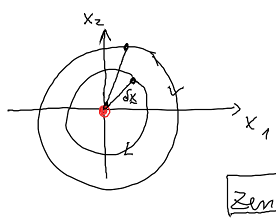
$$A = DF(\underline{x}^*_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1/ml^2 \\ -mgl & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{\text{Eigenwerte}} \quad \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

ungedämpfte Schwingung

allg. Lösung $\quad \delta \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$



$\boxed{\text{Zentrum}}$

(b) $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$

„Segway"

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/ml^2 \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

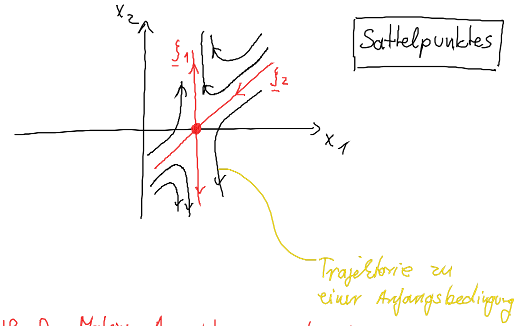
Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$

allgemeine Lösung: $\delta \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}$

$\to \infty$ instabile Richtung $\underline{\xi}_1$

stabile Richtung $\underline{\xi}_2$

Phasenportrait eines $\boxed{\text{Sattelpunktes}}$



NB: Da Matrix $\underline{\underline{A}}$ nicht symmetrisch ist sind die Eigenvektoren i.a. nicht senkrecht zueinander.

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

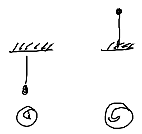
$$\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

Reibung

$$\to \quad \dot{x}_1 = \frac{x_2}{ml^2}, \qquad \dot{x}_2 = -mgl \sin x_1 - 2\mu x_2$$

Reibung

Fixpunkte unverändert



Linearisierung: $\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/mL^2 \\ -mgl\cos x_1 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

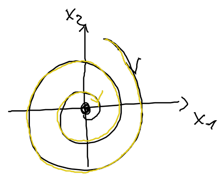
ⓐ $x_1 = x_2 = 0$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/ml^2 \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

falls $\gamma^2 < \omega^2$ (schwache Reibung)

- schwache Reibung: gedämpfte Schwingung

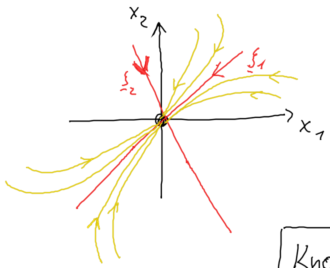


stabil!

$\boxed{\text{Fokus}}$

- starke Reibung $(\gamma^2 > \omega^2)$: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

  überdampfte Schwingung



stabil!

$\boxed{\text{Knoten}}$

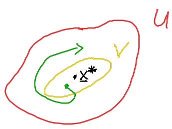
1.2. Stabilität und Langzeitverhalten

allgemeine Definition von Stabilität

▶ Sei $\underline{x}^*$ FP des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ dann ist $\underline{x}^*$ stabil oder (Lyapunov-stabil), wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V von $\underline{x}^*$ existiert so dass

$$\underline{x} \in V \longrightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \qquad \forall t \geq 0$$

Anfangsbed.

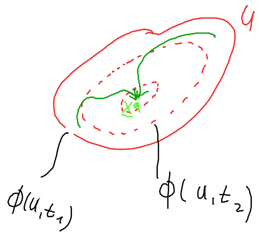


▶ Sei $\underline{x}^*$ FP des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ dann ist $\underline{x}^*$ asymptotisch stabil, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U existiert

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U \qquad 0 < t_1 < t_2$$

und $\lim_{t \to \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \qquad \forall \underline{x} \in U$

U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen. D.h. Phasenraumvolumina schrumpfen



↯ Widerspruch zum Liouville'schem Satz für Hamiltonsche Systeme

▸ Ein dynamisches System heißt dissipativ wenn Phasenraumvolumina schrumpfen (kontrahieren).