5.4. Stabilität der stationären Lösungen (im Fall einer Mode)

Laser Grundgleichungen

Spezialfall eines homogenen Mediums

$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$

$g_{\lambda n} = g$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Feld: } \quad & \dot{a} = (-i\omega - \kappa) a - i g^* P \\ \text{Polaris.: } \quad & \dot{P} = (-i\bar{\omega} - \gamma) P + i g D a \\ \text{Inversion: } \quad & \dot{D} = \frac{D_0 - D}{T_1} + 2i \left(g^* P a^* - c.c. \right) \end{aligned}}$$

mit $P = \sum_u p_u$ * dimensionslose mikroskop. Polarisation

$D = \sum_u d_u$

- Stationäre Lösungen analog zu Bilanzgleichungen + Aussage über Laserfrequenz Ω_L

$$\Omega_L = \omega \frac{\gamma}{\gamma + \kappa} + \bar{\omega} \frac{\kappa}{\kappa + \gamma}$$

$\gamma = \frac{1}{T_2}$ ← Lebensdauer der Polarisation

$2\kappa = \frac{1}{\tau_p}$ ← Lebensdauer der Photonen

5.4.1. Nicht-lasende Lösung

$P = 0, \; a = 0$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{a} \\ \delta \dot{P} \\ \delta \dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega - \kappa & -i g^* & 0 \\ i g D_0 & -i\bar{\omega} - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1/T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta P \\ \delta D \end{pmatrix}$$

Annahme einer exakten Resonanz: $\omega = \bar{\omega}$

Eigenwertwertgleichung: $$\left(\lambda + \frac{1}{T_1}\right) \underbrace{\left(\lambda^2 + \lambda (2i\omega + \kappa + \gamma) + (i\omega + \kappa)(i\bar{\omega} + \gamma) - |g|^2 D_0 \right)}_{\text{gekoppelte Dynamik aus Feld + Polarisation}} = 0$$

Relaxation der Inversion mit $\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}$

$$\lambda_{1,2} = -i\omega \underbrace{- \frac{\kappa + \gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa - \gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}}$$

Dämpfung falls $^{Re} < 0$, d.h. stationärer nicht lasender Zustand stabil

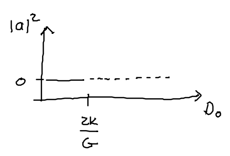
d.h. $\frac{\kappa + \gamma}{2} > \sqrt{\left(\frac{(\kappa - \gamma)}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}$

$\kappa\gamma > |g|^2 D_0$

$D_0 < \frac{\kappa\gamma}{|g|^2} = \frac{2\kappa}{G}$

⇑

1. Laserschwelle



[Erinnerung:

$$G_{\lambda n} = |g_{\lambda n}|^2 \frac{2\gamma}{(\Omega_L - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}$$

falls resonant:

$$G = \frac{|g|^2 2\gamma}{\gamma^2} = \frac{2|g|^2}{\gamma}$$]

5.4.2. Stabilität der lasenden Lösung a^{ss}, p^{ss}, d^{ss}

$$\sum_n d^{ss} = D^{ss}$$

mit
$$a = a^{ss} e^{-i\Omega_L t + \varphi}$$
$$p = p^{ss} e^{-i\Omega_L t + \varphi}$$

wobei $\frac{d}{dt} a^{ss} = \frac{d}{dt} p^{ss} = 0$

Ansatz für Feld und Polarisation
$$a = \mathcal{E}(t)\, e^{-i\Omega_L t + \varphi}$$
$$p = p_A(t)\, e^{-i\Omega_L t + \varphi}$$

$\mathcal{E}(t)$ ist zeitliche Änderung im "rotating frame" der Laserfrequenz.

$$\rightarrow \dot{\mathcal{E}} = [\, i(\Omega_L - \omega) - \kappa\,]\,\mathcal{E} - i g^* p_A$$
$$\dot{p}_A = [-i(\Omega_L - \bar{\omega}) - \gamma\,]\, p_A + i g D \mathcal{E}$$
$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} + 2i\,(g^* p_A \mathcal{E}^* - g p_A^* \mathcal{E})$$

+ Annahme exakter Resonanz
$$\omega = \bar{\omega} = \Omega_L$$

Normierung der Variablen auf stationare Zustände : $\hat{D} = \frac{D}{D^{ss}}$, $\hat{E} = \frac{\mathcal{E}}{a^{ss}}$, $\hat{P} = \frac{p_A}{p^{ss}}$

zusätzlich definieren wir:
$$\hat{t} = t\gamma = t/T_2$$
$$\hat{\kappa} = \frac{\kappa}{\gamma} = \kappa T_2$$
$$\hat{\gamma} = \frac{T_2}{T_1}$$
$$J = \hat{D}_0 - 1$$

Dimensionslose Grundgleichungen des Lasers:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{P} = -\hat{P} - \hat{D}\hat{E}$$
$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{E} = -\hat{\kappa}\hat{E} - \hat{\kappa}\hat{P}$$
$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{D} = (1 + J - \hat{D})\hat{\gamma} - \hat{\gamma} J\, \mathrm{Re}\{\hat{P}\hat{E}^*\}$$

Jakobi Matrix bei $\hat{E} = \hat{P} = \hat{D} = 1$

$$DF\big|_{FP} = \begin{array}{c} \text{"E"} \\ \text{"P"} \\ \text{"D"} \end{array} \begin{pmatrix} -\hat{\kappa} - \lambda & -\hat{\kappa} & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ \hat{\gamma} J & -\hat{\gamma} J & -\hat{\gamma} - \lambda \end{pmatrix}$$

Eigenwertgleichung $\det(DF_{FP} - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$$(-\hat{\kappa}-\lambda)(\hat{\gamma}\lambda+\lambda^2+\hat{\gamma}+\lambda+\hat{\gamma}J)+\hat{\kappa}(\hat{\gamma}J-\lambda-\hat{\gamma})=0$$

$$\lambda^3+\lambda^2(1+\hat{\gamma}+\hat{\kappa})+\lambda\hat{\gamma}(1+J+\hat{\kappa})+2\hat{\kappa}\hat{\gamma}J=0$$

$\Downarrow$ Koeffizientenvergleich

Vorzeichen von $\mathrm{Re}\,\lambda$ bestimmt Stabilität.

Idee: Suche nach Hopf-Bifurkation

$q = \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$

$\mathrm{Re}\,\lambda = 0$

$\boxed{\lambda = p + iq}$

$\Rightarrow (*_1)\quad -iq^3+iq\hat{\gamma}(1+J+\hat{\kappa})=0$

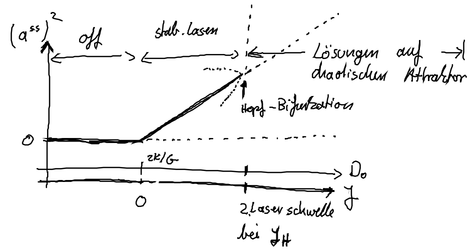
$(*_2):\quad -q^2(1+\hat{\gamma}+\hat{\kappa})+2\hat{\kappa}\hat{\gamma}J=0$

$\overset{(*_2)}{\Rightarrow}\quad q^2=\dfrac{2\hat{\kappa}\hat{\gamma}J}{(1+\hat{\gamma}+\hat{\kappa})}$

$\overset{\text{in }(*_1)}{\Rightarrow}\quad \boxed{J_H=\dfrac{(1+\hat{\kappa})(1+\hat{\kappa}+\hat{\gamma})}{(\hat{\kappa}-1-\hat{\gamma})}}$

$J = \dfrac{D_0}{D_0^{ss}} - 1$

Pump Parameter J_H bei dem $p=0$, d.h. Bifurkationsparameter für Hopf-Bif.



- Wann existiert J_H, d.h. wann ist $J_H > 0$?

d.h.: $\hat{\kappa} > 1+\hat{\gamma}$

$\kappa T_2 > 1 + \dfrac{T_2}{T_1}$

$\boxed{\kappa > \dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_1}}$

Photonenlebensdauer $\dfrac{1}{\tau_{ph}} = 2\kappa$ — Polarisations-Lebensdauer — Inversions-Lebensdauer

Bedingung für existierende 2. Laserschwelle

$\hat{=}$

Bedingung für <u>schlechten Resonator</u>

Bem: Hopf-Bifurkation ist sub-kritisch, d.h. es entstehen instabile Orbits

(im guten Resonator bleibt stationärer Zustand stabil!)

- Bemerkung: im Ringlaser mit periodischen Randbedingungen sieht die Gleichung für das E-Feld wie folgt aus $\dot{\hat{E}} + c\frac{\partial}{\partial z}\hat{E} = -\hat{\kappa}\hat{E} - \hat{\kappa}\hat{P}$

$\rightarrow$ Lösungen sind laufende Wellen mit Wellenvektor $\underline{k}$

$\rightarrow$ für $\underline{k} \neq 0$ tritt 2. Laserschwelle schon bei guten Resonatoren auf

5.4.3. Analogie zu Lorenz-Gleichungen

Durch die Transformation

$X := \hat{E}\sqrt{\hat{\gamma}J}$ $\quad \sigma = \hat{\kappa}$

$Y := \hat{P}\sqrt{\hat{\gamma}J}$ $\quad b = \hat{\gamma}$

$Z := r - \hat{D}$

Kontrollparameter $r := J + 1$

ergeben sich die Lasergleichungen in äquivalenter Form wie die Lorenz Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY \end{aligned}}$$

Bénard – Problem	Class C Laser (semiklassisch)
Strömungsfeld X	Lichtmoden amplitude $\hat{E}$
Temperaturverteilung Y, Z	P, D
Kontrollparameter $r = \frac{R}{R_c}$ ← Rayleighzahl	$\hat{D}_0$ Pumpstärke
σ Prandl - Zahl	$\hat{K} = KT_2$ Resonatorverluste
konduktiver Zustand (Flüssigkeit ruht)	Laser off-state
$r = 1$, konvektive Instabilität	$\hat{D}_0 = 1$, $J = 0$ 1. Laserschwelle
stationäre Konvektionsrollen	stationärer Laserbetrieb
$r = r_H$	$J = J_H$ 2. Laserschwelle
chaotisch oszillierende Konvektionsrollen	chaotische Intensitätsschwankungen
$r > r_H$	$J > J_H$

Klassifizierung von Lasern (dynamisch)

	Bedingung		Gleichungen
$\boxed{A}$ Class A	$\frac{1}{T_1} \gg K$; $\frac{1}{T_2} \gg K$; $\frac{1}{T_2} \gg \frac{1}{T_1}$	• Inversion adiabatisch eliminiert • Polarisation adiabatisch eliminiert	1 (E-Feld Gleichung)
$\boxed{B}$ Class B	$\frac{1}{T_2} \gg K$; $\frac{1}{T_2} \gg \frac{1}{T_1}$	• Polarisation adiabatisch eliminiert [$\dot{P} = 0$, nicht stationärer Zusammenhang]	2 (Photonen & Inversion)
$\boxed{C}$ Class C	$\frac{1}{T_2} \approx \frac{1}{T_1} \approx K$	vollen Grundgleichungen nötig (falls inhomogen und multimodig sind das $2M + N$ Gleichungen)	3 (Photonen, Inversion, Polarisation)