5.4. Stabilität der stationären Lösungen (im Fall einer Mode)

Laser Grundgleichungen

Spezialfall eines homogenen Mediums

$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}$

$g_{\lambda n} = g$

Feld: $\dot{a} = (-i\omega - \kappa)\,a - i g^* P$

Polaris.: $\dot{P} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\,P + i g D a$

Inversion: $\dot{D} = \dfrac{D_0 - D}{T_1} + 2i\left(g^* P a^* - c.c.\right)$

mit $P = \sum_u p_u$ ← dimensionslose mikroskop. Polarisation

$D = \sum_u d_u$

- Stationäre Lösungen analog zu Bilanzgleichungen + Aussage über Laserfrequenz Ω_L

$$\Omega_L = \omega \frac{\gamma}{\gamma + \kappa} + \bar{\omega} \frac{\kappa}{\kappa + \gamma}$$

$\gamma = \frac{1}{T_2}$ ← Lebensdauer der Polarisation

$2\kappa = \frac{1}{\tau_p}$ ← Lebensdauer der Photonen

5.4.1. Nicht-lasende Lösung

$p = 0, \quad a = 0$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{a} \\ \partial\dot{P} \\ \partial\dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega - \kappa & -ig^* & 0 \\ i g D_0 & -i\bar{\omega} - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -1/T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta P \\ \delta D \end{pmatrix}$$

Annahme einer exakten Resonanz: $\omega = \bar{\omega}$

Eigenwertgleichung: $\left(\lambda + \frac{1}{T_1}\right) \underbrace{\left(\lambda^2 + \lambda(2i\omega + \kappa + \gamma) + (i\omega + \kappa)(i\bar{\omega} + \gamma) - |g|^2 D_0\right)}_{\text{gekoppelte Dynamik aus Feld + Polarisation}} = 0$

Relaxation der Inversion mit $\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}$

$$\lambda_{1,2} = -i\omega - \frac{\kappa + \gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa - \gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}$$

Dämpfung falls $\mathrm{Re} < 0$, d.h. stationärer nicht lasender Zustand stabil

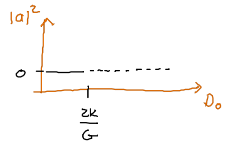
d.h. $\frac{\kappa + \gamma}{2} > \sqrt{\left(\frac{\kappa - \gamma}{2}\right)^2 + |g|^2 D_0}$

$\kappa\gamma > |g|^2 D_0$

$D_0 < \frac{\kappa\gamma}{|g|^2} = \frac{2\kappa}{G}$

⇑

1. Laserschwelle



Erinnerung:

$$G_{\lambda n} = |g_{\lambda n}|^2 \frac{2\gamma}{(\Omega_L - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2}$$

falls resonant:

$$G = \frac{|g|^2 2\gamma}{\gamma^2} = \frac{2|g|^2}{\gamma}$$

5.4.2. Stabilität der lasenden Lösung a^{ss}, p^{ss}, d^{ss}

$$\sum_n d^{ss} = D^{ss}$$

mit $a = a^{ss} e^{-i\Omega_L t + \varphi}$ wobei $\frac{d}{dt} a^{ss} = \frac{d}{dt} p^{ss} = 0$

$p = p^{ss} e^{-i\Omega_L t + \varphi}$

Ansatz für Feld und Polarisation

$$a = \mathcal{E}(t)\, e^{-i\Omega_L t + \varphi}$$
$$p = P_A(t)\, e^{-i\Omega_L t + \varphi}$$

$\mathcal{E}(t)$ ist zeitliche Änderung im "rotating frame" der Laserfrequenz.

$$\rightarrow \dot{\mathcal{E}} = [i(\Omega_L - \omega) - \kappa]\,\mathcal{E} - i g^* P_A$$
$$\dot{P}_A = [-i(\Omega_L - \bar{\omega}) - \gamma]\, P_A + i g D \mathcal{E}$$
$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} + 2i\left(g^* P_A \mathcal{E}^* - g P_A^* \mathcal{E}\right)$$

+ Annahme exakter Resonanz $\omega = \bar{\omega} = \Omega_L$

Normierung der Variablen auf stationäre Zustände: $\hat{D} = \frac{D}{D^{ss}}$, $\hat{E} = \frac{\mathcal{E}}{a^{ss}}$, $\hat{p} = \frac{P_A}{p^{ss}}$

zusätzlich definieren wir: $\hat{t} = t\gamma = t/T_2$

$\hat{\kappa} = \frac{\kappa}{\gamma} = \kappa T_2$

$\hat{\gamma} = \frac{T_2}{T_1}$

$J = \hat{D}_0 - 1$

Dimensionslose Grundgleichungen des Lasers:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{p} = -\hat{p} - \hat{D}\hat{E}$$
$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{E} = -\hat{\kappa}\hat{E} - \hat{\kappa}\hat{p}$$
$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{D} = (1 + J - \hat{D})\hat{\gamma} - \hat{\gamma} J \,\mathrm{Re}\{\hat{p}\hat{E}^*\}$$

Jakobi Matrix bei $\hat{E} = \hat{p} = \hat{D} = 1$

$$DF\big|_{FP} = \begin{array}{c} \text{"E"} \\ \text{"p"} \\ \text{"D"} \end{array} \begin{pmatrix} -\hat{\kappa} - \lambda & -\hat{\kappa} & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ \hat{\gamma} J & -\hat{\gamma} J & -\hat{\gamma} - \lambda \end{pmatrix}$$

Eigenwertgleichung $\det(DF_{FP} - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$$(-\hat{k}-\lambda)(\hat{\mu}\lambda+\lambda^2+\hat{\mu}+\lambda+\hat{\mu}J)+\hat{k}(\hat{\mu}J-\lambda-\hat{\mu})=0$$

$$\lambda^3+\lambda^2(1+\hat{\mu}+\hat{k})+\lambda\hat{\mu}(1+J+\hat{k})+2\hat{k}\hat{\mu}J=0$$

Koeffizientenvergleich

$\Rightarrow (*_1)\quad -iq^3+iq\hat{\mu}(1+J+\hat{k})=0$

$(*_2):\quad -q^2(1+\hat{\mu}+\hat{k})+2\hat{k}\hat{\mu}J=0$

$\overset{(*_2)}{\Rightarrow}\quad q^2=\dfrac{2\hat{k}\hat{\mu}J}{(1+\hat{\mu}+\hat{k})}$ $\quad\overset{\text{in }(*_1)}{\Longrightarrow}\quad \boxed{J_H=\dfrac{(1+\hat{k})(1+\hat{k}+\hat{\mu})}{(\hat{k}-1-\hat{\mu})}}$

Pump Parameter J_H bei dem $p=0$, d.h. Bifurkationsparameter für Hopf-Bif.

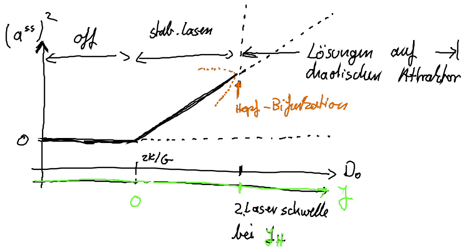
Vorzeichen von $\mathrm{Re}\,\lambda$ bestimmt Stabilität.

Idee: Suche nach Hopf-Bifurkation

$q=\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$
$\mathrm{Re}\,\lambda=0$

$\boxed{\lambda=p+iq}$

$J=\dfrac{D_0}{D_0^{st}}-1$



- Wann existiert J_H, d.h. wann ist $J_H>0$?

d.h.: $\hat{k}>1+\hat{\mu}$

$\kappa T_2>1+\dfrac{T_2}{T_1}$

$$\boxed{\kappa>\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_1}}$$

Photonenlebensdauer $\frac{1}{\tau_{ph}}=2\kappa$ — Polarisations-Lebensdauer — Inversions-Lebensdauer

Bedingung für existierende 2. Laserschwelle

$\hat{=}$

Bedingung für schlechten Resonator

(im guten Resonator bleibt stationärer Zustand stabil!)

Bem: Hopf-Bifurkation ist sub-kritisch, d.h. es entstehen instabile Orbits

- Bemerkung: im Ringlaser mit periodischen Randbedingungen sieht die Gleichung für das E-Feld wie folgt aus $\quad \dot{\hat{E}}+c\dfrac{\partial}{\partial z}\hat{E}=-\hat{k}\hat{E}-\hat{k}\hat{P}$

  $\rightarrow$ Lösungen sind laufende Wellen mit Wellenvektor $\underline{k}$

  $\rightarrow$ für $\underline{k}\neq 0$ tritt 2. Laserschwelle schon bei guten Resonatoren auf

5.4.3. Analogie zu Lorenz-Gleichungen

Durch die Transformation

$X:=\hat{E}\sqrt{\hat{\mu}J}$ $\qquad \sigma=\hat{k}$
$Y:=\hat{P}\sqrt{\hat{\mu}J}$ $\qquad b=\hat{\mu}$
$Z:=r-\hat{D}$

Kontrollparameter $r:=J+1$

ergeben sich die Lasergleichungen in äquivalenter Form wie die Lorenz Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY \end{aligned}}$$

Bénard – Problem		Class C Laser (semiklassisch)	
Strömungsfeld	X	Lichtmoden amplitude	$\hat{E}$
Temperaturverteilung	Y, Z		P, D
Kontrollparameter	$r = \frac{R}{R_c}$ ← Rayleighzahl	$\hat{D}_0$	Pumpstärke
σ	Prandl-Zahl	$\hat{\kappa} = \kappa T_2$	Resonatorverluste

Bénard – Problem	Class C Laser
Konduktiver Zustand (Flüssigkeit ruht)	Laser off-state
$r = 1$, konvektive Instabilität	$\hat{D}_0 = 1$, $J = 0$ 1. Laserschwelle
stationäre Konvektionsrollen	stationärer Laserbetrieb
$r = r_H$	$J = J_H$ 2. Laserschwelle
chaotisch oszillierende Konvektionsrollen	chaotische Intensitätsschwankungen
$r > r_H$	$J > J_H$

Klassifizierung von Lasern (dynamisch)

	Bedingung		Gleichungen
$\boxed{A}$ Class A	$\frac{1}{T_1} \gg \kappa$ $\frac{1}{T_2} \gg \kappa$; $\frac{1}{T_2} \gg \frac{1}{T_1}$	• Inversion adiabatisch eliminiert • Polarisation adiabatisch eliminiert	1 (E-Feld Gleichung)
$\boxed{B}$ Class B	$\frac{1}{T_2} \gg \kappa$ $\frac{1}{T_2} \gg \frac{1}{T_1}$	• Polarisation adiabatisch eliminiert [$\dot{P} = 0$, nutzt stationären Zusammenhang]	2 (Photonen & Inversion)
$\boxed{C}$ Class C	$\frac{1}{T_2} \approx \frac{1}{T_1} \approx \kappa$	vollen Grundgleichungen nötig (falls inhomogen und multimodig sind das $2M + N$ Gleichungen)	3 (Photonen, Inversion, Polarisation)