

Fortsetzung, Herleitung der Lasergrundgleichungen

Wellengleichung für komplexe Amplitude E_λ einer Mode λ

$$(I) \omega_\lambda^2 E_\lambda + \ddot{E}_\lambda + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \dot{E}_\lambda = -\frac{1}{\epsilon_0} \ddot{P}_\lambda$$

mit Modansatz

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = \sum_\lambda \underline{E}_\lambda(t) \underline{e}_\lambda(\underline{x})$$

und

$$P_\lambda = \int u_\lambda(\underline{x}) \underline{e}_\lambda \underline{P}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

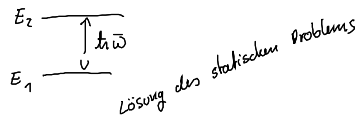
Polarisation des Mediums wird berechnet über Dipoldichte

mikroskopisch $\tilde{p}(t) = \langle -e \underline{r} \rangle = -(\rho^{(+)}) \mu_{12} + \rho^{(-)} \mu_{12}^*$

↑
dimensionslose Polarisation statisches Dipolmoment μ_{12}

makroskopisch $\underline{P}(\underline{x}, t) = \sum_i \delta(\underline{x} - \underline{x}_i) \tilde{p}_i(t)$
 ↳ Summe über alle Atome

die mikroskopische dimensionslose Polarisation ist gegeben: $\rho(t) = c_1^*(t) c_2(t) e^{-i\omega t}$ (*)



$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$
 ↑
 Wellenfunktion mit Licht-Materie WW

wobei aus Schrödinger-Gleichung folgende

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{i\hbar} c_2 \mu_{12} \underline{E}(t) e^{-i\omega t} \quad (II)$$

$$\dot{c}_2 = \frac{1}{i\hbar} c_1 \mu_{21} \underline{E}(t) e^{i\omega t}$$

$$\mu_{12} = \mu_{21}^*$$

Bewegungsgleichung für $\rho(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &\stackrel{(I)}{=} -i\omega \rho + c_1^* \dot{c}_2 e^{-i\omega t} + \dot{c}_1^* c_2 e^{-i\omega t} \\ &\stackrel{(II)}{=} -i\omega \rho + \frac{1}{i\hbar} |c_1|^2 \underline{E}(t) \mu_{21} e^{i\omega t - i\omega t} - \frac{1}{i\hbar} |c_2|^2 \underline{E}(t) \mu_{12}^* e^{i\omega t - i\omega t} \\ &= -i\omega \rho - \frac{1}{i\hbar} \underline{E}(t) \mu_{21} [|c_2|^2 - |c_1|^2] \end{aligned}$$

Inversion eines Atoms d $\frac{|c_2|^2}{|c_1|^2}$ Besetzungswahrsch. für E_2
 " " " " für E_1

- Dynamik der Polarisation
 since ω_0 ist ungedämpfter Oszillator
 $\rho \sim e^{-i\omega t}$

- bisher nicht betrachtet: Dämpfung von ρ durch stöße oder Elektron-Elektron-WW oder WW mit Photonen

$\rightarrow T_2$ Zeit, Lebensdauer der Polarisation

phänomenologischer Ansatz $\dot{\rho} = -\gamma \rho$

kann mit mikroskop. Theorie berechnet werden

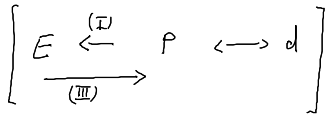
$\gamma = \gamma_0 + \frac{1}{T_2}$
 \uparrow pure dephasing

$$\dot{\rho} = -i\bar{\omega}\rho - \gamma\rho - \frac{1}{i\hbar} \underline{E}(t) \mu_{21} d \quad (\text{III})$$

osz. Dämpfung WW mit Licht

$$d = |\xi_2|^2 - |\xi_1|^2$$

$$d = c_2^* c_2 - c_1^* c_1 + \dot{c}_2^* c_2 - \dot{c}_1^* c_1$$



$\rho = c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t}$

Gleichung für d benötigt!

(II) \downarrow

$$\dot{d} = \frac{E(t)}{i\hbar} \left(\mu_{21} c_1 c_2^* e^{i\bar{\omega}t} - \mu_{21}^* c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t} - \mu_{12} c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t} + \mu_{12} c_1 c_2^* e^{i\bar{\omega}t} \right)$$

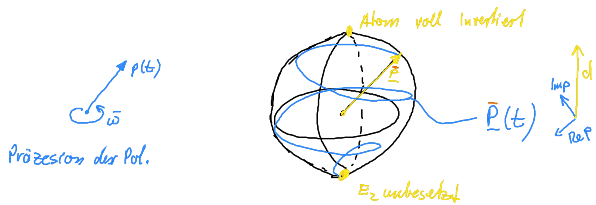
$$\dot{d} = \frac{E(t)}{i\hbar} \left(\mu_{12}^* \rho^* - \mu_{12} \rho \right)$$

- WW der Atome mit Umgebung (Pumpen oder strahlungslose Relaxation) noch nicht berücksichtigt
- \rightarrow phänomenologisch $\frac{d_0 - d}{T_1}$

$$\dot{d} = \frac{E(t)}{i\hbar} \left(\mu_{12}^* \rho^* - \mu_{12} \rho \right) + \frac{d_0 - d}{T_1} \quad (\text{IV})$$

Gleichung (III) und (IV) sind identisch mit dem Bloch'schen Gleichern für einen Elektronenspin mit Magnetfeld $\underline{H}(t)$

Polarisation $\hat{=}$ "Spin"



Variation von ρ durch äußeres Feld mit Rabi-Frequenz

$$\Omega = \omega_R = \frac{E \mu_{21}}{\hbar}$$

5.2. Näherungen der Laser - Grundgleichungen

- Rotating wave approximation (RWA)
- Slowly varying amplitude approximation (SVA)

Die makroskopischen Gleichungen sehen wie folgt aus:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \underline{p}^{(\pm)}}{\partial t} = (-i\bar{\omega} - \mu) \underline{p}^{(\pm)} + \frac{1}{i\hbar} (\underline{E} / \mu_{z1}) / \mu_{z2} D$$

↑ makroskop. Inversen

$$\underline{p}(x,t) = \sum_i \delta(x-x_i) \overbrace{(p_i(t)\mu_{z2} + p_i^*(t)\mu_{z2}^*)}^{\tilde{F}_i}$$

$$\underline{p}(x,t) = \underline{p}^{(+)}(x,t) + \underline{p}^{(-)}(x,t)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\sim e^{-i\bar{\omega}t} \quad e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{D_0 - D}{T_1} - \frac{2}{i\hbar} \underline{E} (\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)})$$

Term A

③ Wellengleichung (I)

Zerlegung der Modenamplituden E_λ : $E_\lambda = E_\lambda^{(+)} + E_\lambda^{(-)}$

$$E_\lambda^\pm(t) = \underbrace{\epsilon_\lambda}_{\text{Amplitude}} \underbrace{e^{\mp i\omega_\lambda t}}_{\text{Phase}}$$

ω_λ Lichtfrequenz der Mode im Resonator

Term A

$$\underline{E} (\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)}) = \sum_\lambda u_\lambda(x) \epsilon_\lambda (E_\lambda^{(+)} + E_\lambda^{(-)}) (\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)})$$

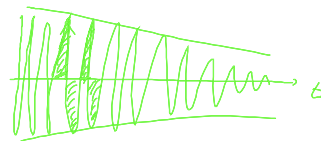
$i\bar{\omega}$ Energieabstand
 ω_λ Modenfrequenz

Resonatormoden

$$= \sum_\lambda u_\lambda(x) \epsilon_\lambda \left[\underbrace{E_\lambda^+ \underline{p}^- - E_\lambda^- \underline{p}^+}_{\sim e^{\mp i(\omega_\lambda - \bar{\omega})t}} + \underbrace{E_\lambda^- \underline{p}^- - E_\lambda^+ \underline{p}^+}_{\sim e^{\mp i(\omega_\lambda + \bar{\omega})t}} \right]$$

schnelle Oszillation

langsame Osz.



positive und negative Beiträge kompensieren sich
→ kann vernachlässigt werden

RWA!

=>

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T_1} - \frac{2}{i\hbar} \sum_\lambda \left(u_\lambda \epsilon_\lambda E_\lambda^+ \underline{p}^- - u_\lambda \epsilon_\lambda E_\lambda^- \underline{p}^+ \right)$$

analog auf ① anwenden:

$$\underline{P}^{(-)} \dot{\underline{P}}^{(+)} = (-i\bar{\omega} - \gamma) \underline{P}^- \underline{P}^+ + \frac{P^-}{i\hbar} \sum_{\lambda} (E_{\lambda}^+ + E_{\lambda}^-) (u_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} \mu_{z1}) \mu_{z2} \cdot \underline{D}$$

vernachlässigt
 $\sim e^{i(\omega_{\lambda} + \bar{\omega})t}$

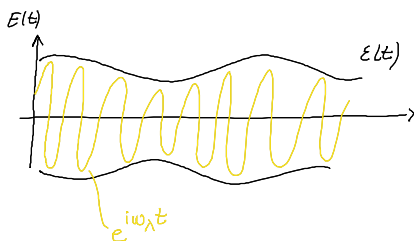
$$\Rightarrow \dot{\underline{P}}^+ = (-i\bar{\omega} - \gamma) \underline{P}^+ + \frac{1}{i\hbar} \sum_{\lambda} E_{\lambda}^+ (u_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} \mu_{z1}) \mu_{z2} \underline{D}$$

$$E_{\lambda} = E^+ + E^-$$

analog bei Wellengleichung ③

$$\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}^{\pm} + \ddot{E}_{\lambda}^{\pm} + \sum_{\lambda'} \frac{G_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon_0} \dot{E}_{\lambda}^{\pm} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \ddot{P}_{\lambda}^{\pm}$$

2. Näherung: Slowly varying envelope approximation (SVEA) (SUA)



Überlegung zur Form der Lösung

$$E_{\lambda}^{\pm}(t) = \varepsilon_{\lambda}(t) e^{\mp i\omega_{\lambda}t}$$

falls: Dynamik mit ω_{λ} sehr viel schneller als Dynamik von $\varepsilon_{\lambda}(t)$

dann:

$$|\dot{\varepsilon}_{\lambda}| \ll |\omega_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}|$$

$$\dot{E}_{\lambda}^{\pm}(t) = (\dot{\varepsilon}_{\lambda} \mp i\omega_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}) e^{\mp i\omega_{\lambda}t} \approx \mp i\omega_{\lambda} E_{\lambda}^{\pm}$$

$$\ddot{E}_{\lambda}^{\pm}(t) = (\ddot{\varepsilon}_{\lambda} \mp 2i\omega_{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\lambda} - \omega_{\lambda}^2 \varepsilon_{\lambda}) e^{\mp i\omega_{\lambda}t}$$

größte Term wird von $\omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}^{\pm}$ in Wellengleichung kompensiert
 \rightarrow Entwicklung weiter nötig

$$|\dot{\varepsilon}_{\lambda}| \ll |\omega_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}|$$

$$|\ddot{\varepsilon}_{\lambda}| \ll |\omega_{\lambda} \dot{\varepsilon}_{\lambda}|$$

$$\ddot{E}_\lambda^\pm \approx (\mp 2i\omega_\lambda \dot{E}_\lambda^\pm - \omega_\lambda^2 E_\lambda^\pm) e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

$$= \mp 2i\omega_\lambda (\dot{E}_\lambda^\pm \pm i\omega_\lambda E_\lambda^\pm) - \omega_\lambda^2 E_\lambda^\pm$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E}_\lambda^\pm = (\mp i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) E_\lambda^\pm \pm i \frac{1}{2\epsilon_0} \bar{\omega} p_\lambda^\pm}$$

$$\kappa_\lambda := \frac{\sigma_\lambda}{2\epsilon_0} \quad \text{optische Verlustrate}$$

$$\text{Analog } \ddot{p}_\lambda^\pm \approx \bar{\omega}^2 p_\lambda^\pm$$

• hier muss die Entwicklung nicht weiter getrieben werden da kein Term $\bar{\omega}^2 p_\lambda^\pm$ vorkommt

keine zweite Zeitableitung mehr!

Wellengleichung in erster Ordnung in der Zeit

• nur gültig wenn $|\dot{E}_\lambda^\pm| \ll |\omega_\lambda E_\lambda^\pm|$

reduzierte Wellengleichung