5. Semiklassische Lasergleichungen

- Herleitung der Lasergleichungen aus Maxwellgleichungen und Schrödingergleichung

Maxwellgleichung:

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$
$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$$
$$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\underline{E} = 0$$

$\underline{E}$ elektrisches Feld
$\underline{D}$ Dielektrische Verschiebung
$\underline{H}$ Magnetfeld
$\underline{B}$ magn. Induktion

Materialgleichung: a) $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$

Polarisation des Lasermediums
(gesamte Dipolmomente der Atome pro Volumen)
→ muss erst berechnet werden
(klass. Oszillatormodell kann Laserfähigkeit nicht erklären → QM Modell nötig)

b) $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$ nichtmagnetisches Material

c) Stromdichte $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ Ohmsches Gesetz

Leitfähigkeit

⇒ Herleitung der Wellengleichung: $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\underline{E}) = \mathrm{rot}\,\dot{\underline{B}} = \mu_0 \dot{\underline{j}} + \varepsilon_0\mu_0 \ddot{\underline{E}} + \mu_0 \ddot{\underline{P}}$

$$-\Delta \underline{E} = \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} + \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\underline{E}} + \mu_0 \ddot{\underline{P}}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} = \mu_0 \ddot{\underline{P}}}$$

- für $\underline{P} = 0$ ist dies die Telegraphengleichung für Wellenausbreitung in leitenden Medien
- $\underline{P}$ stellt einen Quellterm für el. Feld dar

Elektrisches Feld im Resonator

Entwicklung nach Moden λ: $\underline{E}(\underline{x},t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, \overset{\text{ortsabhängiges Modenprofil}}{u_\lambda(\underline{x})}$

die $u_\lambda(x)$ sind Lösungen von

$$\Delta u_\lambda(x) + \underbrace{\frac{\omega_\lambda^2}{c^2}}_{k_\lambda^2} u_\lambda(\underline{x}) = 0$$

- mit geeigneten Randbedingungen z.B. period. RB $u_\lambda(x) \sim e^{i \underline{k}_x \underline{x}}$ laufende Welle

oder Dirichlet Randbedingungen $u_\lambda(\underline{x}) \sim \sin \underline{k}_x \underline{x}$ stehende Welle

- Orthonormalität $\int u_\lambda(\underline{x})\, u_{\lambda'}(\underline{x})\, d\underline{x} = \delta_{\lambda\lambda'}$

Optische Polarisation $\hat{=}$ Richtung von $\underline{E}_\lambda(t) = \underline{e}_\lambda E_\lambda(t)$

Richtungsvektor der Polarisation von $\underline{E}_\lambda(t)$

=> Modenansatz in Wellengleichung

$$\sum_\lambda \left(-\frac{\omega_\lambda^2}{c^2} E_\lambda - \frac{1}{c^2}\ddot{E}_\lambda - \sigma\mu_0 \dot{E}_\lambda\right) \underline{e}_\lambda u_\lambda(x) = \mu_0 \ddot{\underline{P}}$$

$\int d\underline{x}\, u_{\lambda'}(\underline{x})\, \underline{e}_\lambda \ldots$ =>

$$\text{(I)} \quad \boxed{\omega_{\lambda'}^2 E_{\lambda'} + \ddot{E}_{\lambda'} + \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_\lambda \sigma_{\lambda'\lambda} \dot{E}_\lambda = -\frac{1}{\varepsilon_0} \ddot{P}_{\lambda'}}$$

- mit $\sigma_{\lambda'\lambda} = \int u_{\lambda'}\, \sigma\, u_\lambda\, d\underline{x}$

(für räumlich-homogene Leitfähigkeit: $\sigma_{\lambda'\lambda} = \sigma\, \delta_{\lambda'\lambda}$)

d.h. keine Kopplung der Moden durch $\sigma(x)$

- $P_\lambda(t) := \int u_\lambda(\underline{x})\, \underline{e}_\lambda\, \underline{P}(\underline{x}, t)\, d\underline{x}$

opt. Polarisation

makroskop. Polarisation der Dipole

gesucht P_λ

↳ 5.1. Materiegleichungen eines 2-Niveau Systems

- aktives Medium (hier 2 Niveau System) wird quantenmechanisch beschrieben

Schrödingergleichung: (*1) $\quad i\hbar \dot{\psi}(\underline{r}, t) = H \psi(\underline{r}, t)$

Elektronen Wellenfunktion

System Hamiltonian

$H = H_0 + H_\omega$ ← Wechselwirkung Atom mit el. Feld "Licht-Materie-WW"

ungestörter Anteil der Elektronen des Atoms

$H_0 \varphi_j = E_j \varphi_j \qquad (j = 1, 2)$

E_2 ——— φ_2

E_1 ——— φ_1

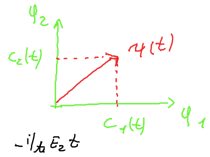
Eigenwerte von H_0 | Eigenfunktionen von H_0

$H_\omega = \underbrace{e\, \underline{r}}_{\text{el. Dipolmoment}} \cdot \underline{E}(t)$ Störoperator WW mit elektrischem Feld

[Beschreibung im Wechselwirkungsbild
H_0 zeitunabhängig, H_W zeitabhängig]

Entwicklung der Wellenfunktion nach φ_1, φ_2 (ONS)

$$(*_2) \quad \psi(\underline{r},t) = c_1(t)\, \underbrace{\varphi_1(\underline{r})\, e^{-i/\hbar E_1 t}} + c_2(t)\, \underbrace{\varphi_2(\underline{r})\, e^{-i/\hbar E_2 t}}$$



Einsetzen von $(*_2)$ in Schrödingergl. $(*_1)$:

$$\int d\underline{r}\, \varphi_i^* e^{i/\hbar E_i t} \Big[i\hbar \big[\dot{c}_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + \dot{c}_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar E_2 t} \big] + c_1 E_1 \varphi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2 E_2 \varphi_2 e^{-i/\hbar E_2 t}$$

$$= \underbrace{H_0 c_1 \varphi_1}_{c_1 E_1 \varphi_1} e^{-i/\hbar E_1 t} + \underbrace{H_0 c_2 \varphi_2}_{c_2 E_2 \varphi_2} e^{-i/\hbar E_2 t} + c_1 \underbrace{H_W}_{e\underline{r}\underline{E}} \varphi_1 e^{-i/\hbar E_1 t} + c_2 \underbrace{H_W}_{e\underline{r}\underline{E}} \varphi_2 e^{-i/\hbar E_2 t} \Big]$$

da φ_1, φ_2 orthonormal, kann durch $\int d\underline{r}\, \varphi_j^* e^{i/\hbar E_j t}$ auf φ_j projeziert werden

$$(\mathrm{II}) \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \frac{1}{i\hbar} c_2 \underline{E}(t)\, e^{-i\bar{\omega} t} \mu_{12} \\ \dot{c}_2 &= \frac{1}{i\hbar} c_1 \underline{E}(t)\, e^{i\bar{\omega} t} \mu_{21} \end{aligned}}$$

mit $\bar{\omega} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ und

statisch!

Matrixelementen $\mu_{jk} = \int \varphi_j^* e\underline{r}\, \varphi_k\, d\underline{r}$ des Dipoloperators.

$[\mu_{11} = \mu_{22} = 0, \quad \mu_{21} = \mu_{12}^*]$

$\hat{=}$ Schrödingergleichung $(*_1)$ mit ONS φ_1, φ_2 von H_0

$\bar{\omega}$ atomare Übergangsfrequenz

Ziel: Berechnung des dynamischen Dipolelement eines Atoms

$$\tilde{p}(t) := \langle e\underline{r} \rangle = -\int \psi^* e\underline{r}\, \psi\, d\underline{r} \quad \downarrow (*_2)$$

$$= -c_1^* c_2 \mu_{12} e^{-i\bar{\omega} t} - c_2^* c_1 \mu_{21} e^{i\bar{\omega} t}$$

$$= -p(t)\, \mu_{12} - p^*(t)\, \mu_{12}^*$$

$$\boxed{p(t) := c_1^*(t)\, c_2(t)\, e^{-i\bar{\omega} t}}$$

dimensionsloses
Dipolmoment eines Atoms
"Übergang von $E_2 \to E_1$"

benötigt Bewegungsgleichung für $p(t)$ $\to$ aus (II) !