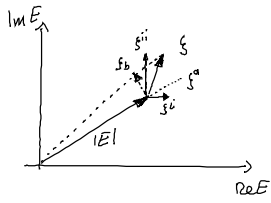


6.4.1. Linienbreite eines Class A Lasers mit Amplituden-Phasen Kopplung

$$\dot{E} = (1 + i\alpha)(\gamma - |E|^2)E + i\omega_0 E + D\xi$$

← Gauß'sches weißes Rauschen
 $\xi = \xi^i + i\xi^{ii}$



Phasenänderung +
Amplitudenänderung durch
spontane Emission

α : Amplituden Phasen
Kopplung
"Linewidth enhancement
factor"

Umschreiben in Amplitude und Phase

$$E = A e^{i\phi}$$

$$\dot{E} = \dot{A} e^{i\phi} + A \dot{\phi} e^{i\phi} \quad (\dot{\phi} = \dot{\phi} - \omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{A} = (\gamma - A^2)A + D\xi^a \\ \dot{\phi} = \alpha(\gamma - A^2) + \frac{D}{A}\xi^b \end{cases} \quad (*)$$

stochastische OGL

Bemerkung:

D ist bekannt beim Laser
(hängt von der Geometrie des
Resonators ab.)

$$D = \sqrt{\beta} \frac{\omega_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} n \frac{1}{\tau_{sp}}$$

↑ ↑ ↑
Teil der spont. Emission, Ladungsträgerdichte, Lebensdauer des Niveaus
n = N - N_{th}
der in der Lasermode landet

- Varianzmatrix von linearen OGL's liefert die Linienbreite → d.h. linearisieren von (*)

$$A = DF|_{FP} = \begin{pmatrix} \gamma - 3A^2 & 0 \\ -2\alpha A & 0 \end{pmatrix} \quad A = \sqrt{\gamma}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\gamma & 0 \\ -2\alpha\sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \underline{A} :

$\Delta\phi$ führt mit Rauschen
einem Random Walk durch
 \rightarrow unbegrenzte Varianz

$$\lambda_1 = 0 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2\gamma \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\gamma}/\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Amplitude hat begrenzte
Varianz

$$\begin{pmatrix} \dot{\Delta A} \\ \Delta\phi \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} \Delta A \\ \Delta\phi \end{pmatrix} + \underline{B} \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \frac{D}{\sqrt{\gamma}} \end{pmatrix}$$

Varianzmatrix: $\underline{\sigma}^2(t) = \int_0^t e^{\underline{A}(t-t')} \underline{B} \underline{B}^T e^{\underline{A}^T(t-t')} dt'$

$$= \int_0^t dt' \begin{pmatrix} D^2 e^{4\gamma(t-t')} & \\ & -D^2 e^{2\gamma(t-t')} \left(e^{2\gamma(t-t')} - 1 \right) \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \end{pmatrix}$$

$M_{22} = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} D^2 e^{2\gamma(t-t')} \left(e^{2\gamma(t-t')} - 1 \right)$

$$\left[\frac{D^2}{\gamma} + D^2 \left(e^{2\gamma(t-t')} - 1 \right)^2 \frac{\alpha^2}{\gamma} \right]$$

$$\underline{\sigma}_{\Delta\phi\Delta\phi}^2 = \int_0^t M_{22} dt'$$

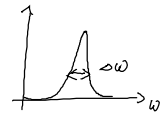
$$\underline{\sigma}_{AA}^2 = \int_0^t M_{11} dt'$$

$$\underline{\sigma}_{\Delta\phi\Delta\phi}^2(t) = \frac{D^2}{\gamma} \left[t - \frac{\alpha^2}{4\gamma} \left(3 + \underbrace{e^{-4\gamma t} - 4e^{-2\gamma t}}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty} - 4\gamma t \right) \right]$$

$$\underline{\sigma}_{AA}^2 = \frac{D^2}{4\gamma}$$

$$\stackrel{t \rightarrow \infty}{=} \frac{D^2}{\gamma} (1 + \alpha^2) \bullet t - \frac{3D^2\alpha^2}{4\gamma^2} \quad (*)_2$$

Spektrum von $E(t)$?



Def. 1: Gauß'sche Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable x heißt Gauß'sch falls es ein σ gibt, so dass

$$\varphi_x(s) = \langle e^{isx} \rangle = e^{-\frac{s^2\sigma^2}{2}}$$

Charakteristische Funktion

- Angewandt auf Laser: $\Delta\phi$ ist eine Gauß'sche Zufallsvariable, da $\sigma_{\Delta\phi\Delta\phi}^2 \sim t$
 $\rightarrow (s=t)$ und Def. 1: $\langle e^{i\phi} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\Delta\phi\Delta\phi}^2}$, $\sigma_{\Delta\phi\Delta\phi}^2 = \langle [\Delta\phi - \langle \Delta\phi \rangle]^2 \rangle$

- Spektrum von E kann über Autokorrelationsfunktion $\overline{\Psi}_E(t_s)$

$$\overline{\Psi}_E(t_s) = \langle E^*(t) E(t+t_s) \rangle = \langle A(t) A(t+t_s) e^{-i\Delta\phi(t)} e^{i\Delta\phi(t+t_s)} \rangle$$

$$\approx \langle A(0)^2 \rangle \langle e^{i\Delta\phi(t_s)} \rangle$$

(im Fixpunkt $A(t)=A(t+t_s)=A(0)$) A^2

$$= A^2 e^{-\frac{1}{2}\sigma_{\Delta\phi\Delta\phi}^2}$$

(*)

$$\overline{\Psi}_E(t_s) = A^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{D^2}{\gamma^2} (1+\alpha^2) t_s} = A^2 e^{-\lambda_s t_s}$$

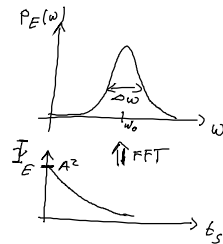
Annahme: keine Korrelation von Amplituden und Phasen rauschen

$\left[e^{-\frac{1}{2} \frac{3D^2\omega^2}{4\gamma^2}}$ wurde vernachlässigt

Wiener-Klindin Theorem ergibt Fourier Spektrum von E

\rightarrow Lorentz-Kurve mit Breite $\Delta\omega = 2\lambda_s$

$$\Delta\omega = \frac{\sigma_{\Delta\phi\Delta\phi}^2}{t}$$



\rightarrow Linienbreite $\Delta\omega$ ergibt sich aus der Varianz der Phase!

$$\Delta\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sigma_{\Delta\phi\Delta\phi}^2(t)$$

$$\Delta\omega = \frac{D^2}{A^2} (1 + \alpha^2)$$

Linienbreite des Lasers

- α -Faktor bestimmt, d.h. vergrößert, die Linienbreite des Lasers

(Historisch wurde so α aufgrund von Experimenten eingeführt)

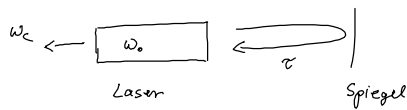
- Äquivalente Phasengleichung $\dot{\Delta\phi} = \frac{D}{A} \sqrt{1+\alpha^2} \xi^b$ liefert gleiche Linienbreite wie volle DGL des Class A Lasers.

α ändert Rauschstärke der Phasengleichung $D^{\text{eff}} = D \sqrt{1+\alpha^2}$

$$\left[\begin{aligned} \dot{E} &= (\gamma - A^2)A + D\xi^a \\ \dot{\Delta\phi} &= \alpha(\gamma - A^2) + \frac{D}{A}\xi^b \end{aligned} \right]$$

Frage: Wie verändert Feedback die Linienbreite?

6.4.2. Linienbreite mit optischem Feedback



$$\omega_0 = \omega_{th} \tau \mu \quad (\text{Frequenz an der Schwelle ohne Feedback})$$

$$\omega_c - \omega_0 = \Delta \omega_c \quad \text{Frequenzshift durch Feedback}$$

$$\dot{E} = (1 + i\alpha) (\gamma - |E|^2) E + D \xi + i\omega_0 E + k E(t - \tau)$$

(zunächst $\alpha = 0$)

Amplituden + Phasen Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (\gamma - A^2) A + D \xi^a + k A(t - \tau) \cos(\phi(t - \tau) - \phi(t)) \\ \dot{\phi} &= \omega_0 + \frac{D}{A(t)} \xi^b + k \frac{A(t - \tau)}{A(t)} \sin(\phi(t - \tau) - \phi(t)) \end{aligned}$$

Erinnerung: • Feedback ändert Frequenz der Fixpunkt-Lösungen (ECM)

$$\begin{aligned} \omega_c - \omega_0 &= -k \alpha \cos \omega_c \tau - k \sin \omega_c \tau \\ \alpha = 0 \quad \omega_c &= \omega_0 - k \sin \omega_c \tau \end{aligned}$$

• Rotation der Phase ins mitbewegte Koordinatensystem ω_c

$$\Delta \phi = \phi - \omega_c t$$

$$\Delta \dot{\phi} = \dot{\phi} - \omega_c$$

\Rightarrow dann ist $\Delta \dot{\phi} = 0$ auf ECM
 \rightarrow Phase ist im Fixpunkt

Betrachte Phasengleichung auf der ECM: $A(t - \tau) = A(t) = A_c$

$$\Delta \dot{\phi} = (\omega_0 - \omega_c) + \frac{D}{A_c} \xi^b + k \sin(\Delta \phi(t - \tau) - \Delta \phi(t) - \omega_c \tau)$$

benutze: $\frac{d\Delta \phi}{dt} \approx \frac{\Delta \phi(t) - \Delta \phi(t - \tau)}{\tau}$

für kleines τ

$$\approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A_c} \xi^b + k \sin(-\tau \Delta \dot{\phi} - \omega_c \tau)$$

Abschätzung von $\tau \Delta \dot{\phi}$: auf der ECM ist $\Delta \dot{\phi} = 0$, d.h. Änderung nur durch Rücklauf

\rightarrow Taylor um $x_0 = -\omega_c \tau$

$$\Delta \dot{\phi} \approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A_c} \xi^b + k \left[\sin(-\omega_c \tau) - \tau \Delta \dot{\phi} \cos(-\omega_c \tau) \right]$$

\uparrow 1. Ordnung in $\tau \Delta \dot{\phi}$

$$\text{ECM: } \omega_c - \omega_0 = -k \sin(\omega_c \tau)$$

$$= \frac{D}{A^c} \dot{f}^b - \varepsilon \Delta \phi k \cos(\omega_c \tau)$$

$$\boxed{\Delta \dot{\phi} \approx \frac{D}{A^c} \frac{1}{1 + \varepsilon k \cos(\omega_c \tau)} \dot{f}^b} \approx \frac{D^{\text{eff}}}{A^c} \dot{f}^b$$

- Linienbreite wird kleiner falls $\omega_c \varepsilon = 0, 2\pi$

- gilt nur für kleine ε , sonst zusätzliche Bifurkationen