

## 2.2. Stabilisierung eines instabilen Fokus mit Delay

(Fortsetzung)

Ausgangspunkt  $(\lambda > 0)$  (1) 
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

nichtinvariantes Kontrollgesetz

Charakteristische Gleichung: <sup>allgemein:</sup>  $\Lambda = -\alpha + b e^{-\Lambda \tau}$  für  $\dot{z} = -\alpha z + b z(t-\tau)$

(2) für (1)  $\Lambda = -K(1 - e^{-\Lambda \tau}) + \lambda \pm i\omega$

$\Lambda \in \mathbb{C}$

$\Lambda = \rho + iq$

Suchen Stabilitätsgrenzen, d.h. suchen Hopf-Bifurkation

d.h. setze  $\text{Re } \Lambda = 0$ ,  $\Lambda = iq$

↳ einsetzen in (2) und spalten nach Re, Im auf

Re  $\lambda = \rho + K[1 - e^{-\rho \tau} \cos q \tau]$   $\rho = 0 \Rightarrow \lambda = K(1 - \cos q \tau)$  (3)

Im  $\omega = q + K e^{-\rho \tau} \sin q \tau$   $\omega = q + K \sin q \tau$  (4)

Bedingung für Hopf-Bifurkation erfüllt für Lösungen von (3), (4).

$\lambda, \omega$  Systemparameter vom Fokus  
 $K, \tau$  Kontrollparameter

→ Hopf-Linie im  $(K, \tau)$ -Raum

(3) →  $0 \leq 1 - \cos q \tau \leq 2 \rightarrow \frac{\lambda}{K} \leq 2 \rightarrow K \geq \frac{\lambda}{2}$

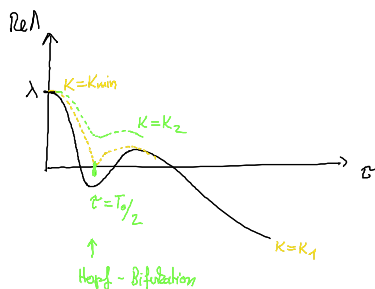
untere Grenze für  $K$  um Fokus durch Hopf zu stabilisieren  
≡ notwendige Bedingung

$K_{\min} = \frac{\lambda}{2}$  (3) →  $\cos q \tau = -1 \Rightarrow q \tau = (2n+1)\pi$

einsetzen in (4) →  $\sin q \tau = 0$   
 $q = \omega$

→  $\tau_{\min} = \frac{\pi}{\omega} (2n+1) = T_0 \frac{2n+1}{2}$   $n = 0, 1, 2, \dots$

$T_0$ : Periode beim Einschwingen des Fokus ohne Delay



Suchen geschlossene Hopf-Kurve, die durch (3) & (4) gegeben ist:

$$\cos^2 qz + \sin^2 qz = 1$$

$$= \left(\frac{K-\lambda}{K}\right)^2 + \left(\frac{\omega-q}{K}\right)^2 = 1$$

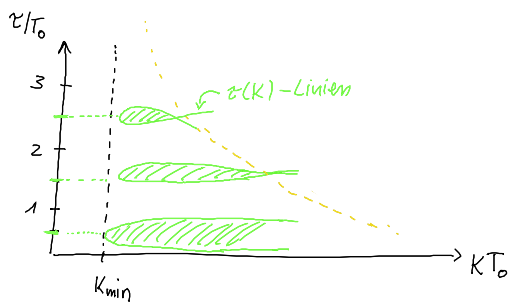
$$\rightarrow \omega - q = \pm K \sqrt{1 - \left(\frac{K-\lambda}{K}\right)^2}$$

$$q = \omega \mp \sqrt{(2K-\lambda)\lambda} \rightarrow \text{einsetzen in (3), (4)}$$

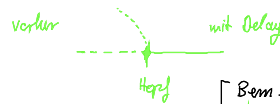
ergibt die gewünschte Kurve

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} z(K) = \frac{\pm \arccos \frac{K-z}{K} + 2\pi j}{\omega \mp \sqrt{(2K-\lambda)\lambda}}$$

← Zweige des Arcosinus.



In den Stabilitätsinseln hat sich die Stabilität des Fokus durch Delay umgekehrt → ist stabil



Bem. ob sub oder super-kritische Hopf ist noch unbekannt.

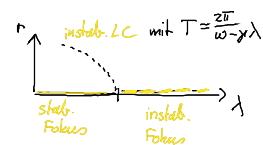
### 2.3. Stabilisierung instabiler periodischer Orbits

Normalform einer subkritischen Hopf-Bif.:

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\mu)|z|^2) z + K(z(t-\tau) - z(t)) \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\lambda < 0, \quad \omega = 1, \quad \mu > 0, \quad K = K_0 e^{i\phi} \in \mathbb{C}$$

ohne Kontrolle



$$z = r e^{i\phi}, \quad \dot{r} = (\lambda + r^2) r$$

$$\dot{\phi} = \omega + \mu r$$

Instabiler LC (Limit Cycle)

unstable periodic orbit (UPO)  $r^2 = -\lambda$  für  $\lambda < 0$

$$\dot{\phi} = \omega - \mu \lambda \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega - \mu \lambda}$$

• Suche Grenzen der Stabilität des LC (o.B.d.A.  $\omega=1$ )

$$T = \frac{2\pi}{1 - \mu \lambda}$$

Welches  $\tau$  liefert nichtinvariante Kontrolle?

$$z(t_0 + \tau) - z(t_0) = 0$$

wähle  $\tau = \frac{2\pi \cdot n}{1 - \mu \lambda}$   $n \in \mathbb{N}$  [Pythagoras-Kurve  $\tau(\mu, \lambda)$ ]

Ansatz: lin. Stabilität des Fokus muss sich ändern um LC zu stabilisieren

→ suche Hopf-Bifurkation des Fixpunktes die durch Delay induziert ist (d.h. wie z.z.)

Hopf-Bedingung:  $\Lambda = p + iq$  mit  $p = \text{Re} \Lambda = 0$

Charakteristische Gl:  $\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda \tau}) = \lambda + i$   $K = K_0 e^{iC}$

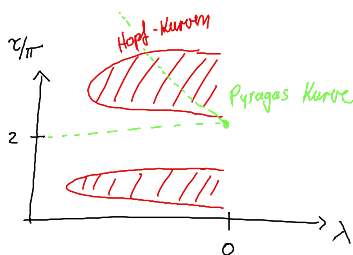
$$\Rightarrow \text{Re} \quad 0 = \lambda + K_0 [\cos(C - q\tau) - \cos C] \quad (3')$$

$$\text{Im} \quad q - 1 = K_0 [\sin(C - q\tau) - \sin C] \quad (4')$$

→ liefern auch wieder Kurve im Parameterraum auf der  $\Lambda = iq$

$$q\tau = \pm \arccos\left(\frac{K_0 \cos C - \lambda}{K_0}\right) + C + 2\pi j$$

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 = \left(\frac{K_0 \cos C - \lambda}{K_0}\right)^2 + \left(\frac{q - 1 + K_0 \sin C}{K}\right)^2$$



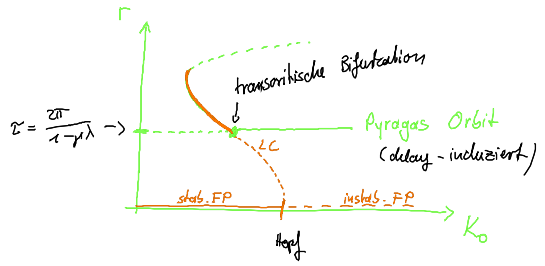
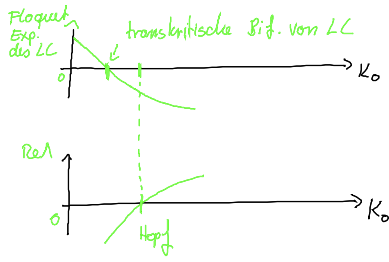
$$\Leftrightarrow q(\lambda, K_0, C)$$

und  $\tau(\lambda, K_0, C)$

\* Hopf-Kurven

auf Pythagoras Kurve im Hopf-Stabilitätsbereich kann der LC stabilisiert werden

Stabilität von FP und LL über  $K_0$



Stabilisierung des LL in einer transkritischen Bifurkation

2.4. Multistabilität der Lösungen von ODE's

Startpunkt:  $\dot{z} = ((\lambda + i\omega) - |z|^2)z + z(t - \tau)$

d.h. ohne Delay oszilliert das System periodisch

Lösung gegeben durch  $z = r e^{i\Omega t}$

superkritische Hopf mit normaler Delay Term  
 $K=1$   
 $\mu=1$

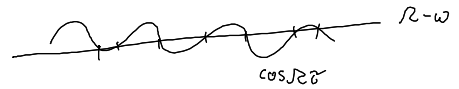
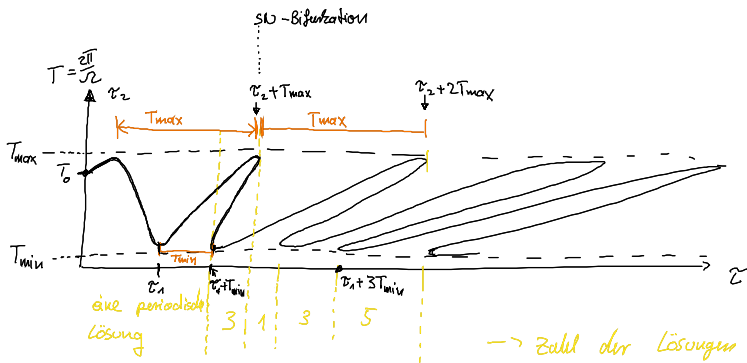
$r$  - Amplitude  
 $\Omega$  - Frequenz der Lösung  
 "rotating wave Lösung"

Charakt. Gleichung:

$$i\Omega = (\lambda + i\omega) - r^2 + e^{-i\Omega\tau}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\lambda + \cos \Omega\tau}$$

$$\Omega = \omega - \sin \Omega\tau$$



→ Zahl der Lösungen steigt mit  $\tau$

► Eigenschaft der Delay-Gleichung

$$\dot{z}(t) = f(z(t), z(t-\tau))$$

mit periodischer Lösung  $z_0(t) = z_0(t - T_0)$  bei  $\tau_0$

mit Delay  $\tau_1$

$$\dot{z}_0(t) = f(z_0(t), z_0(t - \tau_1))$$

wenn  $\tau_1 = \tau_0 + T_0$

$$= f(z_0(t), z_0(t - \tau_0 - T_0)) = f(z_0(t), z_0(t - \tau_0))$$

d.h. Jede Lösung mit Periode  $T_0$  und Delay  $\tau_0$  tritt bei  $\tau_0 + nT_0$  erneut auf.

"Reappearance of solutions"

→ führt zur Multistabilität (N Lösungen)

man kann zeigen  $N = \left(\frac{\omega + 1}{2\pi}\right) \tau$  für  $0 < \omega < 1$

$N \approx \frac{\tau}{\pi}$  für  $\omega > 1$

Zahl der Lösungen steigt linear mit  $\tau$ !