

Fortsetzung 1.3. Bifurkationen

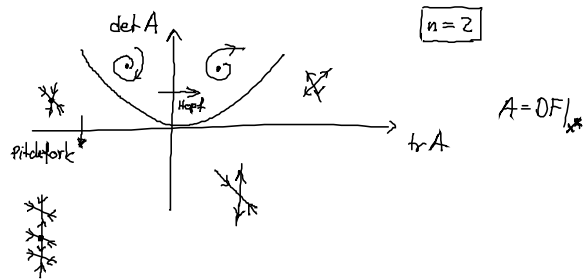
(A) Eigenwert Null Bifurkationen



(B) Hopf - Bifurkation (Andronov - Hopf)
("Realteil-Null - Bifurkation")

$$\lambda = \lambda_0 \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \lambda_0 < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_0 > 0$$

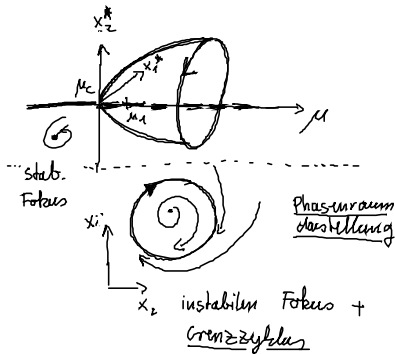
stabiler Fokus instabiler Fokus



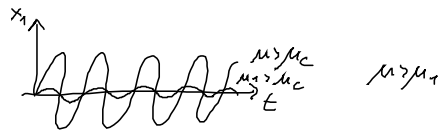
$$\text{tr} A < 0 \quad \rightarrow \quad \text{tr} A > 0$$

(wobei $\det A > 0$)

Bifurkationsdiagramm



Zeitbild



lin. Anteil nichtlinearer Anteil \rightarrow liefert Grenzzyklus

Hopf - Normalform :

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1 + i\mu) |z|^2) z \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

generische Taylorentwicklung
in der Nähe der Hopf - Bifurkation

① $\mathcal{D}z = (\lambda + i\omega) z$ linearisiert um $z^* = 0$

Fixpunkt $z=0$ mit Eigenwerten $\lambda + i\omega$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda < 0 \text{ stab. Fokus} \\ \lambda > 0 \text{ instab. Fokus} \end{array} \right.$

- Darstellung in kartesischen Koordinaten $\delta z = \delta x + i\delta y$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_{\substack{\text{DF} \\ \text{mit} \\ \text{Eigenwerte } \lambda}} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda &= \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr} A)^2}{4} - \det A} \\ &= \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 - \omega^2} \\ &= \lambda \pm i\omega \end{aligned}$$

- Transformation auf Amplitude r und Phase φ :

$$z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$$

eingesetzt in Normalform:

$$\rightarrow \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i\omega \mp (1 + i\gamma_1) r^2) r e^{i\varphi}$$

Hopf-Normalform:

$$\begin{cases} \text{Im: } \dot{\varphi} = \omega \mp \gamma_1 r^2 \\ \text{Re: } \dot{r} = \lambda r \mp r^3 = (\lambda \mp r^2) \cdot r \end{cases}$$

$$\left[\text{DF}_{r,\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda \mp 3r^2 & 0 \\ \mp 2\gamma_1 r & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Fixpunkte: $r=0$ oder $r^2 = \pm \lambda$ ($\lambda \geq 0$)
 \downarrow konstanter Radius

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \omega - \gamma_1 \lambda \quad (\text{Frequenz})$$

$$\varphi = (\omega - \gamma_1 \lambda) t \quad (\text{Phase})$$

ändert sich linear mit der Zeit

γ_1 : Amplituden-Phasen Kopplung

beeinflusst Periode der Oszillation

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi}{\omega - \gamma_1 \lambda}$$

Bemerkung: ungedämpftes Pendel

$$\text{mit } \dot{z} = i\omega z$$

$$z \in \mathbb{C}$$

liefert keine Amplitudenänderung

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$$

\rightarrow Taylor-entwicklung

$$\dot{r} = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3$$

$$\left(\begin{matrix} c_1 = \lambda \\ c_3 = -1 \end{matrix} \text{ in der Hopf-Normalform} \right)$$

falls $c_0 \neq 0$

\hookrightarrow in der komplexen Schreibweise

$$\text{liefert das } \frac{c_0 z}{|z|}$$

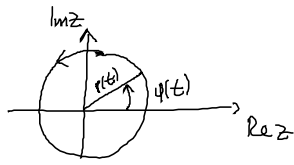
$$c_2 \neq 0 \text{ liefert } c_2 |z| \cdot z$$

nicht polynomiale Form

\rightarrow ungünstig $\rightarrow c_0 = 0 = c_2$

Lösung für period. Oszillation mit nichtversch. Amplitude r

$$z(t) = \sqrt{\pm \lambda} e^{i(\omega - \mu \lambda)t} \quad \text{für } \lambda \geq 0$$



existiert nur für $\lambda \geq 0$

Stuart-Landau Oszillator

Skalierungsverhalten: im Bifurkationspunkt Amplitude $r = \sqrt{\pm \lambda}$
 Frequenz $\omega \neq 0$ charakteristische für Hopf-Bifurkation.

Lin. Stabilität des Grenzzyklus ?

Im allgemeinen: Floquet - Theorie

$$\dot{z} = f(z) \quad , \quad \text{period. Orbit } z^*(t) = z^*(t+T)$$

$$\textcircled{*} \quad \delta \dot{z} = DF|_{z^*(t)} \delta z$$

mit $DF_*^*(t) = DF_*^*(t+T)$

$$\delta z(t) = z^*(t) - z(t)$$

lin. ODE mit period. Koeffizienten

Lösung:
$$\delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j \cdot t} u_j(t)$$

mit $u_j(t) = u_j(t+T)$
 Floquet-Mode

und Floquet-Exponenten $\Lambda_j \in \mathbb{C}$

Ansatz in $\textcircled{*}$ eingesetzt

$$\Lambda u + \dot{u} = DF u \quad , \quad \delta z(t) = U(t) \delta z(0)$$

↓ Monodromy Matrix

Floquet-Multiplikatoren $\mu = e^{\Lambda T}$ (stabil falls $|\mu| < 1$)
 Eigenwerte von $U(t)$

- Bem: • periodischer Orbit muss analytisch bekannt sein um $U(t)$ zu berechnen
 • $\text{Im } \Lambda_j T$ nur modulo 2π definiert

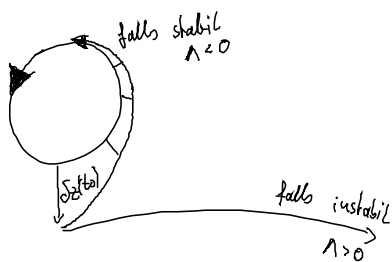
Für Stuart-Landau $\mathcal{O}_S z$ ist analytische Lösung bekannt.

$$* \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 3r^2 & 0 \\ -2\gamma r & 0 \end{pmatrix} \bigg|_{z^*(t)} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ -2\gamma r \sqrt{\pm \lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

$(z = r e^{i\varphi})$

(für Spezialfall des Stuart-Landau $\mathcal{O}_S z$ unl zeitabhängig.)

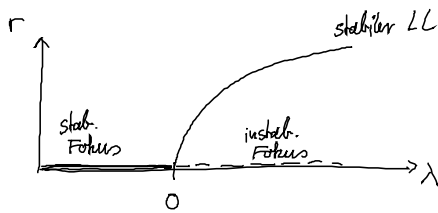
Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von A:



$$\lambda^2 + 2\lambda\lambda = 0$$

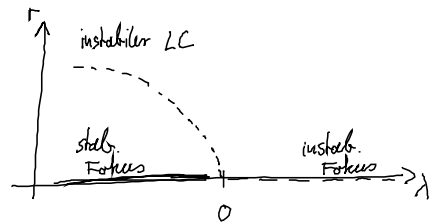
$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{Goldstone-Mode} \\ & \text{(long. Bewegung entlang des LC)} \\ -2\lambda & (\lambda \geq 0) \\ & \text{(transversale Floquet-Exp.)} \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm:



Supercritische Hopf-Bifurkation

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1+i\mu)|z|^2) z$$



Subkritische Hopf-Bifurkation

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\mu)|z|^2) z$$