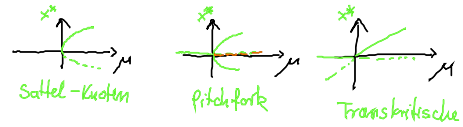


# Fortsetzung 1.3. Bifurkationen

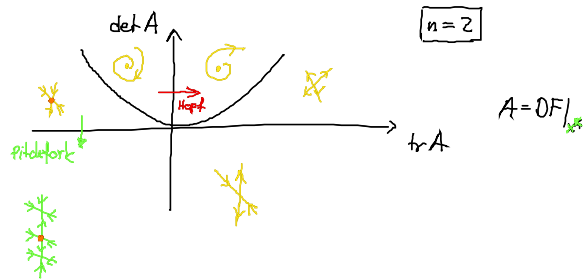
(A) Eigenwert Null Bifurkationen



(B) Hopf - Bifurkation (Andronov - Hopf)  
("Realteil-Null - Bifurkation")

$$\lambda = \lambda_0 \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \lambda_0 < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_0 > 0$$

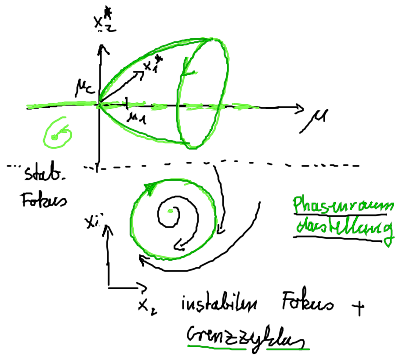
stabiler Fokus                      instabiler Fokus



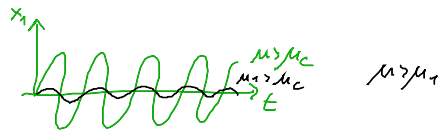
$$\text{tr} A < 0 \quad \rightarrow \quad \text{tr} A > 0$$

(wobei  $\det A > 0$ )

Bifurkationsdiagramm



Zeitbild



lin. Anteil      nichtlinearer Anteil  $\rightarrow$  liefert Grenzzyklus

Hopf - Normalform :

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1 + i\mu) |z|^2) z \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

generische Taylorentwicklung in der Nähe der Hopf - Bifurkation

$$\textcircled{1} \quad \dot{z} = (\lambda + i\omega) z \quad \text{linearisiert um } z^* = 0$$

$$\text{Fixpunkt } z=0 \text{ mit Eigenwerten } \lambda + i\omega \quad \left. \begin{array}{l} \lambda < 0 \text{ stab. Fokus} \\ \lambda > 0 \text{ instab. Fokus} \end{array} \right\}$$

- Darstellung in kartesischen Koordinaten  $\delta z = \delta x + i\delta y$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_{\substack{\text{DF} \\ \text{mit} \\ \text{Eigenwerte } \lambda}} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr} A)^2}{4} - \det A}$$

$$= \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 - \omega^2}$$

$$= \lambda \pm i\omega$$

- Transformation auf Amplitude  $r$  und Phase  $\varphi$ :

$$z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$$

eingesetzt in Normalform:

$$\rightarrow \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i\omega \mp (1 + i\gamma) r^2) r e^{i\varphi}$$

Hopf-Normalform:

Im:	$\dot{\varphi} = \omega \mp \gamma r^2$
Re:	$\dot{r} = \lambda r \mp r^3 = (\lambda \mp r^2) \cdot r$

$$\left[ \text{DF}_{r,\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda \mp 3r^2 & 0 \\ \mp 2\gamma r & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Fixpunkte:  $r=0$  oder  $r^2 = \pm \lambda$  ( $\lambda \geq 0$ )

↓  
konstanter Radius

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \omega - \gamma \lambda \quad (\text{Frequenz})$$

$$\varphi = (\omega - \gamma \lambda) t \quad (\text{Phase})$$

ändert sich linear mit der Zeit

$\gamma$ : Amplituden-Phasen-Kopplung

beeinflusst Periode der Oszillation

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi}{\omega - \gamma \lambda}$$

Bemerkung: ungedämpftes Pendel

mit  $\dot{z} = i\omega z$   
 $z \in \mathbb{C}$

liefert keine Amplitudenänderung

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$$

→ Taylor-Entwicklung

$$\dot{r} = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3$$

$$\left( \begin{matrix} c_1 = \lambda \\ c_3 = -1 \end{matrix} \text{ in der Hopf-Normalform} \right)$$

falls  $c_0 \neq 0$

↳ in der komplexen Schreibweise liefert das  $\frac{c_0 z}{|z|}$

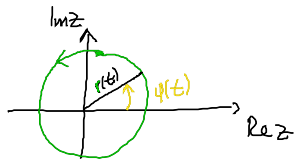
$c_2 \neq 0$  liefert  $c_2 |z| \cdot z$

nicht polynomiale Form

→ ungünstig →  $c_0 = 0 = c_2$

Lösung für period. Oszillation mit nichtversch. Amplitude  $r$

$$z(t) = \sqrt{\pm \lambda} e^{i(\omega - \mu \lambda)t} \quad \text{für } \lambda \geq 0$$



existiert nur für  $\lambda \geq 0$

### Stuart-Landau Oszillator

Skalierungsverhalten: Amplitude  $r = \sqrt{\pm \lambda}$   
 im Bifurkationspunkt Frequenz  $\omega \neq 0$  charakteristische für Hopf-Bifurkation.

Lin. Stabilität des Grenzzyklus?

Im allgemeinen: Floquet - Theorie

$$\dot{z} = f(z), \quad \text{period. Orbit } z^*(t) = z^*(t+T)$$

$$\textcircled{*} \quad \delta \dot{z} = DF|_{z^*(t)} \delta z$$

$$\text{mit } DF_*(t) = DF_*(t+T)$$

$$\delta z(t) = z^*(t) - z(t)$$

lin. ODE mit period. Koeffizienten

$$\text{Lösung: } \delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j t} u_j(t)$$

$$\text{mit } u_j(t) = u_j(t+T)$$

Floquet-Mode

und Floquet-Exponenten  $\Lambda_j \in \mathbb{C}$

Ansatz in  
 (3) eingesetzt

$$\Lambda u + \dot{u} = DF u, \quad \delta z(t) = U(t) \delta z(0)$$

↓  
Monodromy Matrix

$$\text{Floquet-Multiplikatoren } \mu = e^{\Lambda T} \quad (\text{stabil falls } |\mu| < 1)$$

Eigenwerte von  $U(t)$

- Bem: • periodischer Orbit muss analytisch bekannt sein um  $U(t)$  zu berechnen
- $\text{Im } \Lambda_j T$  nur modulo  $2\pi$  definiert

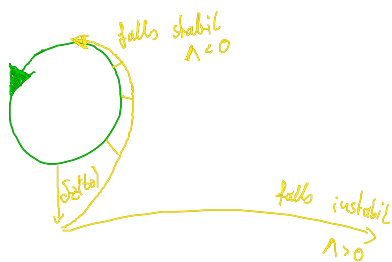
Für Stuart-Landau  $\mathcal{O}_z$  ist analytische Lösung bekannt.

$$* \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 3r^2 & 0 \\ +2\mu r & 0 \end{pmatrix} \bigg|_{z^*(t)} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ +2\mu\sqrt{\pm\lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

$(z = r e^{i\varphi})$

(für Spezialfall des Stuart-Landau  $\mathcal{O}_z$  nicht zeitabhängig.)

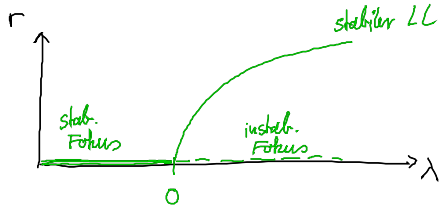
Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von A:



$$\lambda^2 + 2\lambda\mu = 0$$

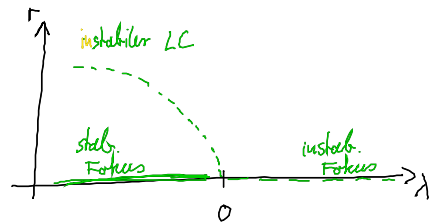
$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{Goldstone-Mode} \\ & \text{(lang. Bewegung entlang des LC)} \\ -2\lambda & (\lambda \geq 0) \\ & \text{(transversale Floquet-Exp.)} \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm:



Supercritische Hopf-Bifurkation

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1+i\mu)|z|^2) z$$



Subkritische Hopf-Bifurkation

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\mu)|z|^2) z$$