English Summary:

<u>Moments</u> of a probability distribution $M_\nu \equiv \langle x^\nu \rangle$

Moment generating function $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$

cumulant generating function $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} C_\nu \quad C_\nu = \langle x^\nu \rangle_c$

$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$ mean

$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle$ variance $\qquad$ covariance matrix (correlation) $\langle \Delta x_k \Delta x_\ell \rangle$

$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$ skewness

<u>Stochastic process</u>: random variable $X(t)$ with probability $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$

<u>Markov process</u>: $p(x_1, t_1 \mid x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 \mid x_2, t_2)$

<u>Chapman-Kolmogorov eq.</u> $p(1|3) = \int dx_2 \, p(1|2)\, p(2|3)$

<u>Ergodizität</u>

Für stationäre Prozesse: Ensemble-Mittel $\overset{!}{=}$ Zeitmittel

Zeitmittel $\bar{X}(T) := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, x(t)$, $\quad T \to \infty$

$$\bar{X}(T) = \langle x \rangle$$

$\Rightarrow$ Berechnung der <u>Autokorrelationsfkt.</u> durch Zeitmittel:

$$G(\tau) := \langle x(t) x(t+\tau) \rangle \overset{!}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, x(t) x(t+\tau)$$

Zusammenhang mit <u>spektralen Eigenschaften</u>:

Fourier-Trafo $\hat{x}(\omega; T) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} dt \, e^{i\omega t} x(t)$

Es gilt $G(\tau) = G(-\tau)$

<u>Spektrale Leistungsdichte</u> (power spectral density)

$$S(\omega) := \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega; T)|^2$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^{T} dt \int_{-T}^{T} dt' \, e^{i\omega\overbrace{(t-t')}^{\tau}} x(t) \underbrace{x(t')}_{t+\tau}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int d\tau \, e^{-i\omega\tau} \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, x(t) x(t+\tau)}$$

$G(\tau)$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau}\, G(\tau)}$$

Wiener – Khinchin – Theorem

Umkehrung :
$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau}\, S(\omega)$$

homogener stoch. Prozess :

$$\lim_{t\to\infty} p(x,t\,|\,x,0) = p(x)$$ (stationärer Prozess wird von jeder Anfangsbed. erreicht)

1.3 Chapman – Kolmogorov – gleichung

Aus der Chapman – Kolmogorov – gl. (diskret in t)

$$p(x_1,t_1\,|\,x_3,t_3) = \int dx_2\, p(x_1,t_1\,|\,x_2,t_2)\, p(x_2,t_2\,|\,x_3,t_3)$$

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3$$

lässt sich eine Diff.gl. für $p(x,t\,|\,x_0,t_0)$ ableiten:

Annahmen : für $\varepsilon > 0$

(i) $$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p(x,t+\Delta t\,|\,z,t)}{\Delta t} = W(x\,|\,z,t)$$ gleichförmig in x, z, t für $|x-z| \geq \varepsilon$ (Sprünge)

Übergangswahrscheinlichk. pro Zeiteinheit $z \to x$

(ii) $$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|<\varepsilon} dx\,(x_i - z_i)\, p(x,t+\Delta t\,|\,z,t) = A_i(z,t) + O(\varepsilon)$$ gleichförmig

(kontinuierliche Übergänge)

(iii) $$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|<\varepsilon} dx\,(x_i - z_i)(x_j - z_j)\, p(x,t+\Delta t\,|\,z,t) = B_{ij}(z,t) + O(\varepsilon)$$ gleichförmig

alle höheren Momente verschwinden $O(\varepsilon)$!

- Betrachte $\frac{\partial}{\partial t}\int dx\, f(x)\, p(x,t\,|\,y,t')$ für bel. Fkt. $f(x)$ und leite daraus Dgl. für $\frac{\partial}{\partial t} p(x,t\,|\,y,t')$ ab :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dx\, f(x)\, p(x,t|y,t') = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int dx\, f(x)\, \frac{[p(x,t+\Delta t|y,t') - p(x,t|y,t')]}{\Delta t}\right.$$

Chapman – Kolmogorov ... umbenennen $x \to z$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int dx\, f(x)\, \frac{\int dz\, p(x,t+\Delta t|z,t)\, p(z,t|y,t') - p(x,t|y,t')}{\Delta t}\right.$$

Für $|x-z|<\varepsilon$:

Entwicklung $f(x) = f(z) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(x_i - z_i) + \sum_{ij}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(x_i-z_i)(x_j-z_j)$ + Rest ($\to 0$ für $|x-z|\to 0$)

Aufspaltung in Integrale $\int\limits_{|x-z|<\varepsilon}$ und $\int\limits_{|x-z|>\varepsilon}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dx\, f(x)\, p(x,t|y,t')$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\iint\limits_{|x-z|<\varepsilon} dx\,dz\left[\sum_i (x_i-z_i)\frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{ij}\frac{1}{2}(x_i-z_i)(x_j-z_j)\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}\right] p(x,t+\Delta t|z,t)\, p(z,t|y,t')\right.$$

(ii) $\boxed{A_i}$ (iii) $\boxed{B_{ij}}$ gibt Beitrag für $\varepsilon \to 0$ ①

$$+ \iint\limits_{|x-z|<\varepsilon} \text{höhere Mon.} \searrow 0 \quad + \iint\limits_{|x-z|<\varepsilon} dx\,dz\, f(z)\, \underbrace{p(x,t+\Delta t|z,t)}_{\to 0}\, p(z,t|y,t')$$

$$+ \iint\limits_{|x-z|\geq\varepsilon} dx\,dz\, f(x)\, p(x,t+\Delta t|z,t)\, p(z,t|y,t') \quad ②$$

Umbenennung $x \leftrightarrow z$

$$- \iint dx\,dz\, f(z)\, p(x,t+\Delta t|z,t)\, p(z,t|y,t') \quad ③$$

$\int dx\, p(x,t+\Delta t|\ldots) = 1$ eingefügt

(i) einsetzen $\boxed{W}$

② $\varepsilon \to 0$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-z|>\varepsilon} dx$ = Hauptwertintegral (Annahme: existiert)

① partielle Integration

$$\int dz\left(\frac{\partial}{\partial z_i}f(z)\right) A_i(z)\, p(z,t|\ldots) = -\int dz\, f(z)\frac{\partial}{\partial z_i}(A_i(z)\, p(z,t|\ldots)) + \text{Randterme } (\to 0)$$

$$\int dz\left(\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j} f(z)\right) B_{ij}(z)\, p(z,t|\ldots) = +\int dz\, f(z)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}[B_{ij}(z)\, p(z,t|\ldots)]$$

$\Rightarrow \int dz\, f(z)\, [\ \ldots\ ] = 0$ für bel. $f(z)$

$[\ \ldots\ ] = 0$

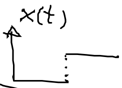
Erg.:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} p(z,t|y,t) = &-\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}\left[A_i(z,t)\, p(z,t|y,t')\right] \qquad (1)\\ &+\sum_{ij}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\left[B_{ij}(z,t)\, p(z,t|y,t')\right]\\ &+\int dx \left[\underbrace{W(z|x,t)\, p(x,t|y,t')}_{(2)} - \underbrace{W(x|z,t)\, p(z,t|y,t')}_{(3)}\right]\end{aligned}}$$

(differentielle Chapman-Kolmogorov-Gl.)

Anfangsbed. $p(z,t'|y,t') = \delta(y-z)$ $\quad t'$ = Anfangszeit

(a) Sprung-Prozesse (diskontinuierlich)



$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(z,t|\ldots) = \int dx \left[W(z|x,t)\, p(x,t|\ldots) - W(x|z,t)\, p(z,t|\ldots)\right]}$$

$(z) \xleftarrow{W(z|x,t)}$ (alle x) Einstreu-Übergangswahrsch. / Zeit

$(z) \xrightarrow[W(x|z,t)]{}$ (alle x) Ausstreu-Übergangswahrsch. / Zeit

Mastergleichung (Bilanz rein − raus)