

Verschränkte Photon-Paare: (Scully, Chap. 18)

aber zuerst: Konzept der Verschränkung

Zwei Untersystem A und B, aus denen setzt sich das Gesamtsystem

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathcal{H}, \text{ die } \mathcal{H}_A = \mathcal{Z}$$

(Bipartite Entanglement)

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = \sum_{i,j=0}^1 c_{ij} |ij\rangle$$

$$= c_{00} |00\rangle + c_{10} |10\rangle + c_{01} |01\rangle + c_{11} |11\rangle$$

Bildlich



Verschränkung tanzt auf,
sobald ich eine Messung
durchführe.

Ich schaue also noch, in welchem
Zustand sich das Teilchen in System
A befindet

$$P_A |\psi\rangle_{AB} = \langle 1 | \psi \rangle_{AB} = c_{10} |0\rangle_B + c_{11} |1\rangle_B$$

$$\left(|00\rangle_{AB} = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \right)$$

Verschränkt heißt, dass ich System B
verändere, indem ich System A messe,
wenn es geht deterministisch.

$$\begin{aligned}
 |4\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |00\rangle + |01\rangle \} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_A \{ |0\rangle_B + |1\rangle_B \}
 \end{aligned}$$

$$P_A^0 |4\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|0\rangle_A \{ |0\rangle_B + |1\rangle_B \}$$

$$|4\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0\rangle_B + |1\rangle_B \}$$

aber: $|4\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |00\rangle + |11\rangle \}$

$$P_A^0 |4\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_B, \text{ d.h.}$$

$$P_B^0 P_A^0 |4\rangle_{AB} \neq 0 \quad P_B^1 P_A^0 |4\rangle_{AB} = 0$$

was ist jetzt: $|4\rangle_{AB} = |11\rangle$

wir benötigen ein Kriterium für
Verschänkung: Separabilität.

$$|4\rangle_{AB} = |4'\rangle_A \otimes |4''\rangle_B$$

separabel und nicht verschänkt.

$$|4\rangle = |11\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \text{ separabel}$$

wichtige Bell-State : $|4\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |00\rangle + |11\rangle \}$

(invariant gegen globale Drehungen)

Formales Kriterium für Separabilität ist über die Schmidt-Zerlegung zu erreichen (singular value decomposition).

$$|4\rangle_{AB} = \sum_{i_A=1}^N \sum_{i_B=1}^M |e_{i_A} e_{i_B}\rangle \underbrace{\langle e_{i_A} e_{i_B} | 4 \rangle_{AB}}_{=: a_{i_A i_B}}$$

$|e_{i_A}\rangle, |e_{i_B}\rangle$ sind orthonormierte Eigenvektoren der Unterräume A und B

Kriterium: wenn es nur ein $a_{i_A i_B} \neq 0$ gibt, dann ist der Zustand separabel.

Man nennt einen Zustand unklassisch beschränkt, wenn es $a_{i_A i_B} \neq 0$ so viele gibt wie die Dimension des kleineren Subsystems.

$$|4\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |00\rangle + |11\rangle \}$$

↑
 $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$

$$S_{AB} = |4\rangle_{AB} \langle 4| = \frac{1}{2} \{ |00\rangle \langle 00| + |00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| \}$$

$$\text{tr}_A(S_{AB}) = S_B = \langle 0|_A S_{AB} |0\rangle_A + \langle 1|_A S_{AB} |1\rangle_A$$

$$= \frac{1}{2} \{ |0\rangle_{B3} \langle 0| + |0\rangle_{B3} \langle 1| + |1\rangle_{B3} \langle 0| + |1\rangle_{B3} \langle 1| \}$$

$$K_B(S_{AB}) = S_A = \langle 0| S_{AB} |0\rangle_B + \langle 1| S_{AB} |1\rangle_B$$

$$= \frac{1}{2} \{ |0\rangle_{A3} \langle 0| + |1\rangle_{A3} \langle 1| \}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle 0| & \langle 1| \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A$$

$$K_{1,2}^A = \frac{1}{2} \quad e_1^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2^A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$K_1^B = 0, \quad K_2^B = 1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Eigenvektoren $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} K_i^B$

$$e_{-1}^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle_B + |0\rangle_B \}$$

$$e_{-2}^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1\rangle_B - |0\rangle_B \}$$

$$U = \sum_{i,j} |e_i^A e_j^B\rangle \langle e_i^A e_j^B|$$

$$U_{AB} = \sum_{i,j} |e_i^A e_j^B\rangle a_{ij}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \langle e_i^A e_j^B | 00 \rangle + \langle e_i^A e_j^B | 01 \rangle \}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} \left(\langle 11 | - \langle 01 | \right) \otimes \langle 11 | \{ |00\rangle + |01\rangle \} = 0$$

nur ein Schmidt-Koeffizient
ungleich Null \rightarrow separabel

$$| \psi \rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |00\rangle + |11\rangle \}$$

$$\rho_{AB} = | \psi \rangle_{AB} \langle 11 |_{AB} = \frac{1}{2} \{ |00\rangle \langle 00| + |00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| \}$$

$$\text{tr}_A(\rho_{AB}) = \rho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}_B(\rho_{AB}) = \rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{1}{2} \quad | \quad a_{22} = \frac{1}{2} \quad | \quad a_{12} = 0 = a_{21}$$

als Maß für Verschränkung, führe
die von Neumann-Entropie ein:

$$S_A = S_B = - \sum_{i,j} (a_{ij})^2 \log_2 (a_{ij}^2)$$

Beispiel: $| \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |01\rangle + |00\rangle \}$

$$a_{11} = 0, \quad S_A = 0$$

$$| \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |11\rangle + |00\rangle \}, \quad a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_A = -2 \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) =$$

$$= - [\log_2(1) - \log_2(2)] = 1$$

was ist mit: $|14\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ |00\rangle + |01\rangle + |11\rangle \}$

$$\tilde{S}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eigenwerte}$$

$$\tilde{S}_A \approx 0.6$$

Verschänkte Photon-Paare:

$$|14\rangle \xrightarrow[u]{\text{operation}} |14\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

nicht separabel und maximal verschränkt

ein Maß für Verschränkung, wenn es sich um "reine" Systeme handelt, die sogenannte Concurrence (bipartite Entanglement) gibt: ≤ 1 ...

$$S = |14\rangle \langle 41| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Eigenwerte errechnen

$$C(S) = \max \{ 0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \}$$

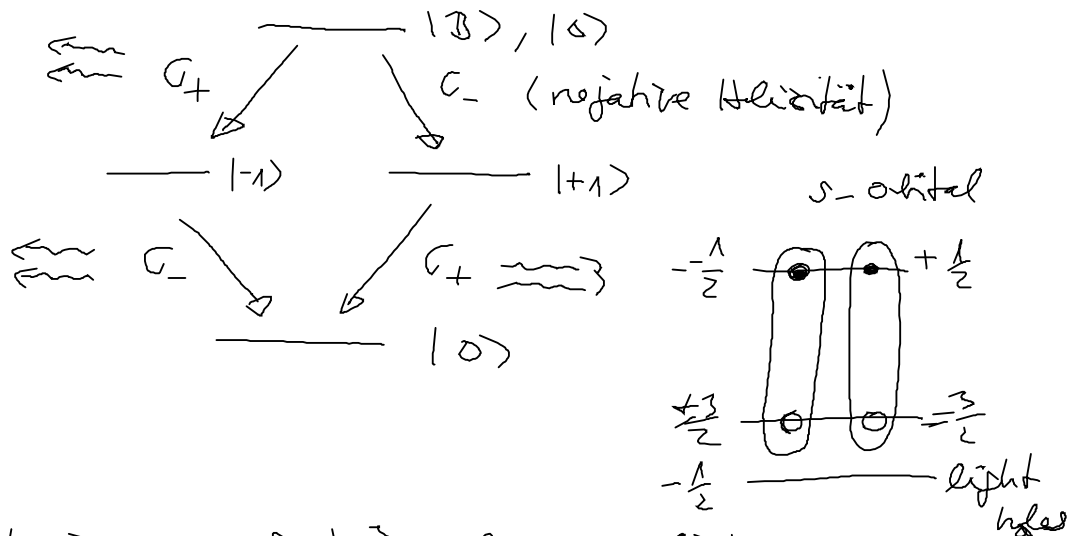
$$\text{wobei } \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$$

[Gesamtsystem 4×4] Wothers, PRL

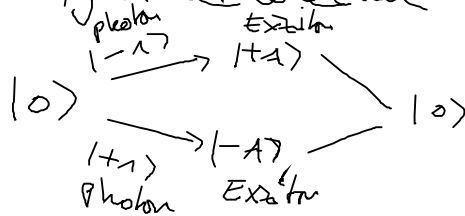
Proposal: Benson & Yamamoto [PRL 84, 2514 (2000)]

$$|14\rangle \xrightarrow[u]{} |14\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |00\rangle + e^{i\phi} |11\rangle \}$$

U nennt Quanten fete (fetter)



$|m\rangle = m$ Drehimpuls projiziert auf die Symmetrieachse



$$|4\rangle_{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\sigma_{xx}^+ \sigma_x^- \rangle + |\sigma_{xx}^- \sigma_x^+ \rangle \}$$

realistische Quantenpunkte, mischen die Exzitonzustände, und dadurch kommt es zu einer Superposition

$$|\sigma_z^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |H_z \rangle - i |V_z \rangle \}$$

$$|\sigma_z^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |H_z \rangle + i |V_z \rangle \}$$

$$|4\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \{ (|H_{xx} \rangle + i |V_{xx} \rangle) \otimes (|H_x \rangle - i |V_x \rangle) + (|H_{xx} \rangle - i |V_{xx} \rangle) \otimes (|H_x \rangle + i |V_x \rangle) \}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ |H_{xx} H_x\rangle - |H_{xx} V_x\rangle + |V_{xx} H_x\rangle + |V_{xx} V_x\rangle \} \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ |H_{xx} H_x\rangle + |H_{xx} V_x\rangle - |V_{xx} H_x\rangle + |V_{xx} V_x\rangle \} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |H_{xx} H_x\rangle + |V_{xx} V_x\rangle \}
\end{aligned}$$

also durch Hybridisierung.