Verschränkte Photon-Paare: (Scully, Chap. 18)

aber zuerst: Konzept der Verschränkung

Zwei Untersystem A und B, aus denen setzt sich das Gesamtsystem

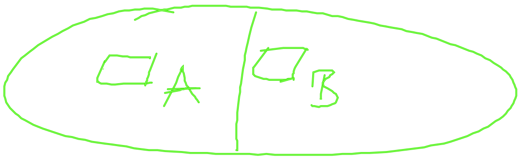
$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathcal{H}, \quad \dim \mathcal{H}_A = 2$$

(Bipartite Entanglement)

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = \sum_{i,j=0}^{1} c_{ij}\, |ij\rangle$$

$$= c_{00}\,|00\rangle + c_{10}\,|10\rangle + c_{01}\,|01\rangle + c_{11}\,|11\rangle$$

Bildlich



Verschränkung taucht auf, sobald ich eine Messung durchführe.

Ich schaue also nach, in welchem Zustand sich das Teilchen im System A befindet

$$P_A\, |\psi\rangle_{AB} = {}_A\langle 1|\psi\rangle_{AB} = c_{10}\, |0\rangle_B + c_{11}\, |1\rangle_B$$

$$\left(|00\rangle_{AB} = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right)$$

Verschränkt heißt, dass ich System B verändere, indem ich System A messe, wenn es geht deterministisch.

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|00\rangle + |01\rangle\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\;|0\rangle_A \{|0\rangle_B + |1\rangle_B\}$$

$$P_A^0 |\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\; {}_A\langle 0|0\rangle_A \;\{|0\rangle_B + |1\rangle_B\}$$

$$|\Psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|0\rangle_B + |1\rangle_B\}$$

<u>aber</u>: $|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|00\rangle + |11\rangle\}$

$P_A^0 |\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_B$, d.h.

$P_B^0 P_A^0 |\Psi\rangle_{AB} \neq 0 \qquad P_B^1 P_A^0 |\Psi\rangle_{AB} = 0$

was ist jetzt : $|\Psi\rangle_{AB} = |11\rangle$

wir benötigen ein Kriterium für Verschränkung: Separabilität.

$|\Psi\rangle_{AB} = |\Psi'\rangle_A \otimes |\Psi''\rangle_B$

separabel und nicht verschränkt.

$|\Psi\rangle = |11\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$ separabel wichtige Bell-State : $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|00\rangle + |11\rangle\}$

(invariant gegen globale Drehungen)

Formales Kriterium für Separabilität ist über die Schmidt-Zerlegung zu erreichen (singular value decomposition).

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i_A=1}^{N} \sum_{i_B=1}^{M} |e_{i_A} e_{i_B}\rangle \underbrace{\langle e_{i_A} e_{i_B}|\psi\rangle_{AB}}_{=: a_{i_A i_B}}$$

$|e_{i_A}\rangle, |e_{i_B}\rangle$ sind orthonormierte Eigenvektoren der Unterräume A und B

Kriterium: wenn es nur ein $a_{i_A i_B} \neq 0$ gibt, dann ist der Zustand separabel.

Man nennt einen Zustand maximal verschränkt, wenn es $a_{i_A i_B} \neq 0$ so viele gibt wie die Dimension des kleineren Subsystems.

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|00\rangle + |01\rangle\}$$

$|0\rangle_A \otimes |B\rangle$

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB\,AB}\langle\psi| = \frac{1}{2}\{|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|\}$$

$$tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B = {}_A\langle 0|\rho_{AB}|0\rangle_A + {}_B\langle 1|\rho_{AB}|1\rangle_B$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ |0\rangle_{B}\langle 0| + |0\rangle_{B}\langle 1| + |1\rangle_{B}\langle 0| + |1\rangle_{B}\langle 1| \right\}$$

$$\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = \rho_A = {}_B\langle 0|\rho_{AB}|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\rho_{AB}|1\rangle_B$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ |0\rangle_A\langle 0| + |1\rangle_A\langle 1| \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{array}{c|cc} & \langle 0| & \langle 1| \\ \hline |0\rangle & 1 & 0 \\ |1\rangle & 0 & 1 \end{array}_A$$

$$\lambda^A_{1,2} = \frac{1}{2} \qquad e^A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e^A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\lambda^B_1 = 0, \quad \lambda^B_2 = 1$$

Eigenvektoren $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\lambda^B_i$

$$\underline{e}^B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ |1\rangle_B + |0\rangle_B \right\}$$

$$\underline{e}^B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ |1\rangle_B - |0\rangle_B \right\}$$

$$\underline{\mathbb{1}} = \sum_{ij} |e^A_i e^B_j\rangle\langle e^A_i e^B_j|$$

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} |e^A_i e^B_j\rangle \underbrace{a_{ij}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle e^A_i e^B_j|00\rangle + \langle e^A_i e^B_j|01\rangle \right\}$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}\left({}_B\langle 1| - {}_B\langle 0| \right) \otimes {}_A\langle 1| \left\{ |00\rangle + |01\rangle \right\} = 0$$

nur ein Schmidt-Koeffizient
ungleich Null → separabel

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |00\rangle + |11\rangle \right\}$$

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB}\,{}_{AB}\langle\psi| = \frac{1}{2} \left\{ |00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| \right\}$$

$$tr_A(\rho_{AB}) = \rho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$tr_B(\rho_{AB}) = \rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_{12} = 0 = a_{21}$$

als Maß für Verschränkung, führe
die von-Neumann-Entropie ein:

$$S_A = S_B = -\sum_{i,j} (a_{ij})^2 \log_2 (a_{ij}^2)$$

<u>Beispiel</u>: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |01\rangle + |00\rangle \right\}$

$$a_{11} = 0, \quad S_A = 0$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |11\rangle + |00\rangle \right\}, \quad a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_A = -2\,\frac{1}{2} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\left[\log_2(1) - \log_2(2) \right] = 1$$

was ist mit: $|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle\}$

$$\tilde{\rho}_{AB} = \begin{array}{c|cc} & {}_A\langle 0| & {}_A\langle 1| \\ |0\rangle_B & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ |1\rangle_B & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \longrightarrow \text{Eigenwerte}$$

$$\tilde{S}_A \approx 0.6$$

Verschränkte Photon-Paare:

$$|\Psi\rangle \xrightarrow[U]{\text{Operation}} |\Psi\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

nicht separabel und maximal verschränkt

ein Maß für Verschränkung, wenn es sich um „simple" Systeme handelt, die sogenannte Concurrence (bipartite Entanglement) gibt:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{array}{c|c} & \langle i_1| \ldots \\ |i_B\rangle & \\ \vdots & \end{array}\left(\quad \right)$$

Eigenwerte errechnen

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$$

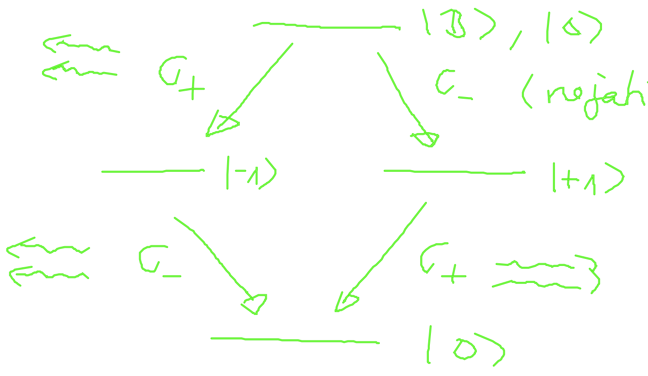
wobei $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$

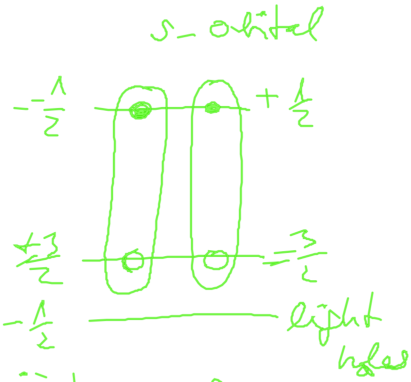
[Gesamtsystem 4×4] Wootters, PRL

Proposal: Benson & Yamamoto [PRL 84, 2514 (2000)]

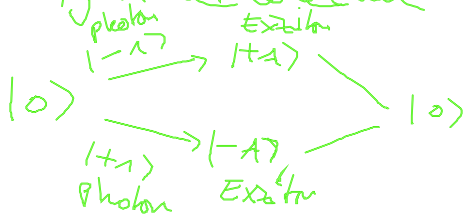
$$|\Psi\rangle \xrightarrow{U} |\Psi\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|00\rangle + e^{i\varphi}|11\rangle\}$$

U nennt Quantum gate (Gatter)





$|m\rangle = m$ Drehimpuls projiziert auf die Symmetrieachse



$$|\psi\rangle_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\sigma^+_{XX} \sigma^-_X\rangle + |\sigma^-_{XX} \sigma^+_X\rangle \right\}$$

realistische Quantenpunkte, mischen die Exzitonzustände, und dadurch kommt es zu einer Superposition

$$|\sigma^-_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |H_i\rangle - i\,|V_i\rangle \right\}$$

$$|\sigma^+_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |H_i\rangle + i\,|V_i\rangle \right\}$$

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(|H_{XX}\rangle + i\,|V_{XX}\rangle\right) \otimes \left(|H_X\rangle - i\,|V_X\rangle\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(|H_{XX}\rangle - i\,|V_{XX}\rangle\right) \otimes \left(|H_X\rangle + i\,|V_X\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ |H_{XX} H_X\rangle - \cancel{|H_{XX} V_X\rangle} + i\, \cancel{|V_{XX} H_X\rangle} + |V_{XX} V_X\rangle \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ |H_{XX} H_X\rangle + \cancel{|H_{XX} V_X\rangle} - i\, \cancel{|V_{XX} H_X\rangle} + |V_{XX} V_X\rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |H_{XX} H_X\rangle + |V_{XX} V_X\rangle \right\}$$

also durch Hybridisierung.