Photon Statistik II: Squeezed States

$$g^{(2)}(t,0) = \frac{\langle a^+ a^+ a a\rangle}{\langle a^+ a\rangle^2} = \frac{\langle a^+ (-\mathbb{1} + a^+ a)\, a\rangle}{\langle a^+ a\rangle^2}$$

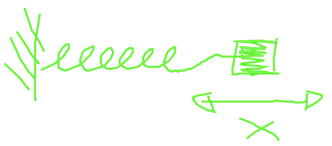
$$= \frac{\langle (a^+ a)^2\rangle - \langle a^+ a\rangle^2 + \langle a^+ a\rangle^2 - \langle a^+ a\rangle}{\langle a^+ a\rangle^2}$$

$$= \frac{(\Delta n)^2}{\langle n\rangle^2} + 1 - \frac{1}{\langle n\rangle} = (\Delta n)^2 \,, \quad \langle n\rangle = 1$$

sehr gutes Review Knight and London, J. Mod. Optics 34, 709 (1987)

Vorüberlegung: harmonische Oszillatoren
Heisenbergsche Unschärferel.

(i) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$ (Hookesche Gesetz)



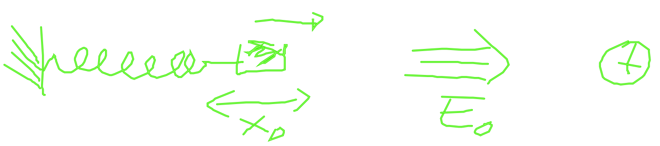
Schwingungen
Lösung ist bekannt

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit } a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

$$\xi = a f(k, m)$$

Eigenfunktionen

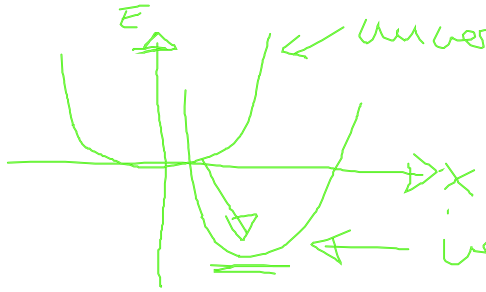
(ii) Masse mit Ladung und schalten ein statisches E-Feld



$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 - e E_0 x$$ (Energie eines geladenen Teilchens)

quadratische Ergänzung

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k \left(x - \frac{e E_0}{k}\right)^2 - \frac{1}{2} k \left(\frac{E_0}{k}\right)^2$$



← unverschoben

konstanten Offset

← verschobener Oszillator

Was ist die Lösung?

$$a \longrightarrow a + \alpha\,, \quad a^+ \longrightarrow a^+ + \alpha^*$$

α geeignet, ist aber ein Skalar

Wir definieren eine Abbildung so, dass

$$D_\alpha^{-1} a^{(+)} D_\alpha = a^{(+)} + \alpha\,, \quad \alpha \text{ reell}$$

$$D D^{-1} = \mathbb{1}$$

$$D_\alpha^{-1} H_0 D_\alpha = D^{-1} \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) D$$

$$= \hbar\omega D^{-1} a^+ D D^{-1} a D + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$= \underbrace{\hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)}_{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2} + \underbrace{\hbar\omega\alpha}_{E_0} \underbrace{(a^+ + a)}_{= x} + \hbar\omega\alpha^2$$

$= H_D$

$\Rightarrow$ wir lösen das Problem, wenn wir die Abbildung D kennen

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle_0 = H_0 |\psi\rangle_0 \quad , \quad \frac{d}{dt} D = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(D|\psi_0\rangle\right) = \left(D H_0 D^{-1}\right)\left(D |\psi_0\rangle\right)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_d = H_d |\psi\rangle_d$$

wir wissen $e^{i\omega t a^\dagger a} a e^{-i\omega t a^\dagger a}$

$$= e^{-i\omega t} a$$

$$e^{-\alpha A} B e^{\alpha A} = B - \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]] - \dots$$

$$e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger} = a - \alpha \underbrace{[a^\dagger, a]}_{= -\mathbb{1}} + \frac{\alpha^2}{2!}[a^\dagger, \underbrace{[a^\dagger, a]}_{= -\mathbb{1}}]$$

$$= a + \alpha$$

$$D_\alpha = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$$ Displacement Operator

(Abstrahlung einer klassischen Ladungsverteilung)

Frage: Heisenberg $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|C|$

$$[A, B] = i C$$

$$x = \frac{1}{2}(a + a^+) \,, \quad p = \frac{1}{2i}(a - a^+)$$

$$[x, p] = \frac{1}{4i}[a + a^+, a - a^+]$$

$$= \frac{1}{4i}(-\mathbb{1} - \mathbb{1}) = \frac{i}{2} \,, \quad C = \frac{1}{2}$$

$$D_\alpha^{-1}|0\rangle = |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Standardabweichung berechnen

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$= \langle \alpha | \frac{1}{4}(a + a^+)^2 | \alpha \rangle - \left(\langle \alpha | \frac{1}{2}(a + a^+) | \alpha \rangle \right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Delta p \Delta x = \sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} C = \frac{1}{4}$$

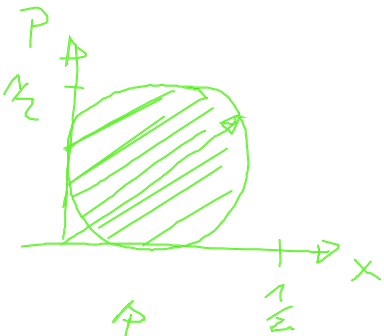
Kohärente oder verschobene Zustand ist von minimaler Unschärfe

$\longrightarrow$ verschobenes gaußsches Wellenpaket

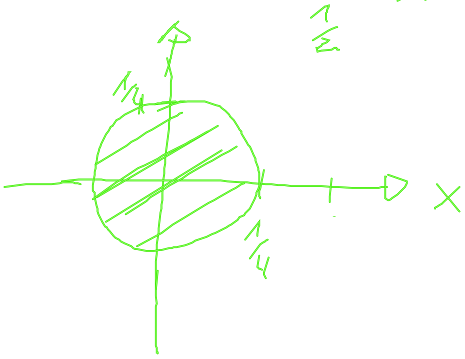
geometrisch: $D_\alpha = e^{2i(\mathrm{Im}[\alpha x] - \mathrm{Re}[\alpha p])}$

Eigenwerte

interessant, Phase nur wohldefiniert wenn $|\alpha| \gg 1$



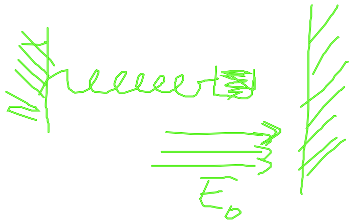
$\phi \in [0, \pi/2]$



$\phi \in [0, 2\pi]$

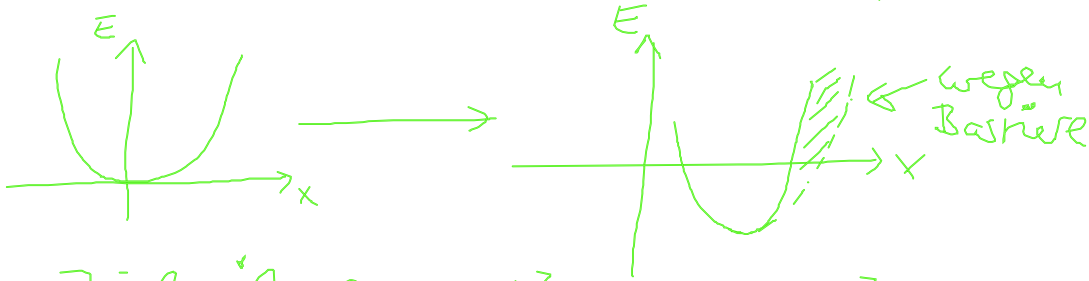
wo Quantenfluktuationen groß sind gegen die Mittelwerte (das eigentliche Quantenlimit), Phase hochproblematisch

$\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$

(iii) 

und eine Potential-schwelle, die die harmonische Oszillation eingeschränkt

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2 - eE_0(ax - bx^2)$$

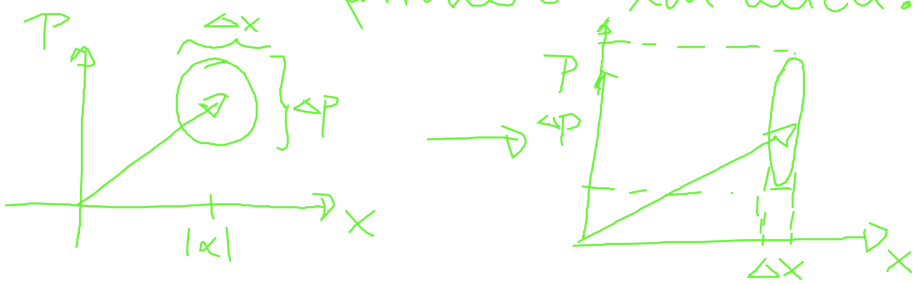


Ziel ist es $(\Delta x)^2 < \frac{1}{4}$ $(\Delta p)^2 < \frac{1}{4}$

so, dass $\Delta x \, \Delta p \geq \frac{1}{4}$ erhalten bleibt

$\longrightarrow$ das ist Squeezing

Also, wir verschieben nicht nur den Kreis im Phasenraum, wir deformieren ihn auch.



Konstruiere die Abbildung

$$|\alpha,\xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle$$

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{+2}}, \quad \xi = re^{i\phi}$$

$$S_\xi^+ a S_\xi = a\cosh(r) - a^+ e^{i\phi}\sinh(r)$$

Δp oder Δx ausdehnen

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{4}e^{-2r}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{1}{4}e^{2r}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{1}{4} \text{ (minimale Unschärfe)}$$

Beispiel: $H = i\hbar\,(g a^{+2} - g^* a^2)$
(ist effektive Beschreibung)

Ziel: Squeezed State $\longrightarrow$ Fock State

$$g^{(2)}(t,0) = (\Delta n)^2, \quad |\alpha|^2 = 1$$

$(\Delta n)^2 = 0$ für Fockstate

$$\langle a^+ a a^+ a\rangle - (\langle a^+ a\rangle)^2 =$$

$$= \langle n|a^+ a a^+ a|n\rangle - n^2 = 0$$

$$\hat{a} \longrightarrow a\cosh(s) - a^+ e^{i\phi}\sinh(s)$$

$$0 \leq s \leq \infty \,, \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\langle n \rangle = \langle a^{+} a \rangle$$

$$= \langle \alpha, \xi | a^{+} a | \alpha, \xi \rangle$$

$$= \langle 0 | S_{\xi}^{-1} \underbrace{D_{\alpha}^{-1} a^{+} D_{\alpha}}_{= a^{+} + \alpha^{*}} \underbrace{D_{\alpha}^{-1} a D_{\alpha}}_{= a + \alpha} S_{\xi} | 0 \rangle$$

$$= |\alpha|^2 + \alpha^{*} \langle 0 | S^{-1} a S | 0 \rangle + \alpha \langle 0 | S^{-1} a^{+} S | 0 \rangle$$
$$+ \langle 0 | S^{-1} a^{+} a S | 0 \rangle$$

$$= |\alpha|^2 + \alpha^{*} \underbrace{\langle 0 | a^{+} | 0 \rangle}_{= 0} \cosh(s) + \ldots$$

$$= |\alpha|^2 + \sinh^2(s)$$

so berechnet man $\langle n^2 \rangle$
und erhält die Varianz

$$(\Delta n)^2 = |\alpha|^2 \{ e^{-2s} \cos^2(\Theta - \tfrac{1}{2}\phi) +$$
$$+ e^{2s} \sin^2(\Theta - \tfrac{1}{2}\phi) \}$$

$$\alpha = |\alpha| e^{i\Theta}$$

jetzt sei $|\alpha|^2 = 1$, $\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$(\Delta n)^2 = \frac{1}{2} \{ 2 \cosh(s) - 2 \cos(2\Theta - \phi) \sinh(s) \}$$

$$\overset{!}{=} 0$$, wobei es reicht, wenn

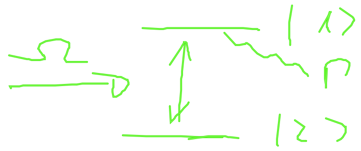
$(\Delta n)^2 < 1$ (nichtklassische Zustand)

$$\cos(2\Theta - \phi) = \tanh(s) + 2\sinh(s)\cosh^3(s)$$

für kleine s geht rechte Seite gegen Null

Teilchen-Zahl Squeezing genau dann, wenn $g^{(2)}(t,0) < 1$

für zu hohe s divergiert das Ganze ($e^s \to \infty$)



Resonanzfluoreszenz

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\left[\Omega\left\{e^{i\Delta t}\sigma_+ + \sigma_- e^{-i\Delta t}\right\}, \rho\right] + \Gamma\left\{2\sigma^-\rho\sigma^+ - \sigma^+\sigma^-\rho - \rho\sigma^+\sigma^-\right\}$$

$$\sigma^- \equiv |0\rangle\langle 1|$$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\,\sigma_z, \quad \sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$$

$$\Delta\sigma_1\,\Delta\sigma_2 \geq \frac{1}{2}|\langle\sigma_3\rangle|, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_x$$

Squeezing $(\Delta\sigma_1)^2 < \frac{1}{2}|\langle\sigma_3\rangle|$, $\sigma_3 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$

Steady-State

$$\langle\sigma_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{z\delta}{1+\delta^2+z^2}, \quad z = \sqrt{2}\,\frac{\Omega}{\Gamma_{\parallel}}, \quad \delta = \frac{2\Delta}{\Gamma}$$

$$\langle\sigma_3\rangle = 2\langle\sigma_+\sigma_-\rangle - 1$$

$$= -\frac{\Delta}{2}(1+\delta^2)\frac{1}{1+\delta^2+z^2}$$

$$\langle\sigma_1^2\rangle = \left\langle\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{4}\underbrace{\langle\sigma_x^2\rangle}_{=\mathbb{1}} = \frac{1}{4}$$

$$(\Delta\sigma_1)^2 = \langle\sigma_1^2\rangle - \langle\sigma_1\rangle^2$$

$$(\Delta\sigma_1)^2 < \frac{1}{2}|\langle\sigma_3\rangle| = \frac{1}{4}(1+\delta^2)\frac{1}{1+\delta^2+z^2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{z^2\delta^2}{(1+\delta^2+z^2)^2} < \frac{1}{4}\frac{(1+\delta^2)}{1+\delta^2+z^2}$$

$$z^2 - \frac{2z^2\delta^2}{1+\delta^2+z^2} < 0$$

$$\Gamma^2 + 2\Omega^2 < 4\Delta^2$$

Δ ist einstellbar und Ω auch,
d.h. squeezing ist vorhanden,
aber Zustand ist nicht
von minimaler Unschärfe
[Walls & Zoller, PRL 47, 709 (1981)]
gesqueezter Dipol