Wh: nicht-relativist. Energie – Impuls – Relation

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{(freies Teilchen)}$$

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla \qquad \text{Korrespondenzregeln}$$

$$\Rightarrow \text{SG} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$$

relativistisch:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

quadrieren: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

Korrespondenzregeln $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = \left(m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta\right) \psi$

mit $\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ d'Alembert-Operator (andres Vorzeichen als im Nolting)

$$\Rightarrow \left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(\underline{r}, t) = 0$$

Klein-Gordon-Gl. (KG-Gl.)

in Vierer-schreibweise

$$\Box = +\partial^\mu \partial_\mu = +\partial_\mu \partial^\mu$$

mit $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$

Korrektur zur letzten VL!!

d) Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

Klass. E-Dyn: $\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\rho(\underline{r},t)}_{\text{Ladungsdichte}} + \nabla\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = 0$ ✓

SG: $\rho(\underline{r},t) \to \psi^*(\underline{r},t)\psi(\underline{r},t) = |\psi|^2$ Aufenthaltswahrsch.

erfüllen die Kontinuitätsgleich. — $\underline{j}(\underline{r},t) \Rightarrow \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$ Wahrsch. Strom

Frage: Erfüllt auch die KG-Gl. die Kontinuitätsgleichung?

Ausgangspunkt: $\left(\Box + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu\partial^\mu\psi = -\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi$

multipliziere mit ψ^*

$$\Rightarrow \psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi = -\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi \quad (1)$$

Eine zweite Gl. erhält man, indem man die KG-Gl. komplex konjugiert

$$\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = -\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi^* \quad \text{multipliziere mit } \psi$$

$$\psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = -\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi\psi^* \quad (2)$$

$(1)-(2)$

$$\Rightarrow \psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = \underbrace{-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}(\psi^*\psi - \psi\psi^*)}_{=0}$$

benutze inverse Kettenregel zum Vorziehen der Ableitungen:

$$\partial_\mu\left(\psi^*\partial^\mu\psi\right)-\left(\partial_\mu\psi^*\right)\left(\partial^\mu\psi\right)$$
$$-\partial_\mu\left(\partial^\mu\psi^*\right)\psi+\left(\partial^\mu\psi^*\right)\partial_\mu\psi=0$$

es gilt: $\left(\partial_\mu\psi^*\right)\left(\partial^\mu\psi\right)=\left(\partial^\mu\psi^*\right)\left(\partial_\mu\psi\right)$
2. und 4. Term auf der linken Seite heben sich auf!

$$\Rightarrow \partial_\mu\left(\psi^*\partial^\mu\psi\right)-\partial_\mu\left(\left(\partial^\mu\psi^*\right)\psi\right)=0$$

~~Eri~~ Erinnerung:
In der klass. E-Dynamik kann man die Kontinuitätsgl. schreiben als: $\partial_\mu j^\mu=0$ mit $j^\mu=(\rho c,\vec{j})$

Das entspricht der Kontinuitätsgleichung (in Viererschreibweise) falls

$$j^\mu\sim\psi^*\partial^\mu\psi-\psi\partial^\mu\psi^*$$

bis auf Faktor

mit $\partial^\mu=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)$, welche Vorfaktor noch konstruieren

Raumkomponenten:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im_0}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$$

Zeit-Komponente:

$$j^0 \longrightarrow \rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right)$$

Ergebnis:

$\vec{j}$ sieht aus wie in der nicht-relativist. QM,

aber ρ ist anders (SG: $\rho = \psi^*\psi > 0$!)

ρ enthält sowohl ψ als auch $\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$

Da die KG-Gl. 2. Ordnung in der Zeit ist können die Anfangswerte von ψ und $\dot{\psi}$ unabhängig gewählt werden

$\Longrightarrow \rho$ ist nicht automatisch positiv

Ausweg: Interpretiere ρ als Ladungsdichte wie in der E-Dyn. ...
(... gleich!)

e) Lösungen der KG-Gleichung für ein freies Teilchen

Ansatz: $\psi(\underline{r},t) = \psi_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$ ebene Welle

(allgemein: $\underset{\text{Wellenpaket}}{\psi(\underline{r},t)} \sim \int d\underline{k} \; \phi(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$)

Einsetzen in die KG-Gleichung

$$\left(\Box + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi$$

$$= \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \underline{k}^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2\left(\underline{k}^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \pm c\sqrt{\underline{k}^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}}$$

oder

$$E = \hbar\omega = \pm c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$$ formal 2 Lösungen

Es gibt formal also zwei Lösungen, insbesondere auch eine Lösung mit negativer "Energie"!

Das ist anders in der nicht-relativist. QM: Dort gibt immer eine niedrigste Energie (und damit einen Grundzustand)

Anmerkung

Ladungsinterpretation der KG-Gleichung

wir haben gesehen: • $\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$

Kann negativ werden, also nicht als Aufenthaltswahrsch. interpretiert werden

• Die KG-Gl. besitzt Lösung mit $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$

„Ausweg"

Definiere durch Multiplikation mit Elementarladung e_0

„Ladungsdichte"

$$\rho'(\underline{r},t) = \frac{i\hbar e_0}{2m_0c^2}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

Ladungsstromdichte

$$\underline{j}'(\underline{r},t) = \frac{-\hbar i}{2m_0}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

ρ' als Ladungsdichte darf beide Vorzeichen haben!

Wellenfunktion des freien Teilchens

$$\psi_\pm(\underline{r},t) = A_\pm e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\cdot\underline{r} \mp |E|t)}$$

setze das in Def. von ρ' ein mit $|E| = +\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}$

man erhält:

$$\rho'_\pm(\underline{r},t) = \pm\frac{e_0|E|}{m_0c^2}\,\psi_\pm^*(\underline{r},t)\,\psi_\pm(\underline{r},t)$$

ψ_+ : Teilchen mit Ladung $+e_0$

ψ_- : Teilchen mit Ladung $-e_0$

f) <u>Nicht-relativist. Grenzfall der KG-Gl. für freies Teilchen</u>

wir hatten:

$$\psi(\underline{r},t) = \psi_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

setze $\omega = \frac{E}{\hbar}$ — positive Lösung aus der Wurzel

umschreiben:

$$\psi(\underline{r},t) = \varphi(\underline{r},t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\overbrace{m_0 c^2}^{\text{Ruheenergie}} t}$$

mit $\varphi(\underline{r},t) = \underset{\psi_0}{\varphi_0}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r} - \frac{i}{\hbar}E' t}$ mit $E' = E - m_0 c^2$

Idee dahinter:

Spalte Ruheenergie $m_0 c^2$ im Zeitfaktor ab, denn:

Im nichtrelativist. Grenzfall ist die Ruheenergie die dominierende Energie im System!

$$\Rightarrow E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$$

$\Rightarrow \varphi(\underline{r},t)$ ist dann nur langsam veränderlich in der Zeit (im Vergleich zu $e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$)

Betrachte nun die zweite Zeitableitung von $\psi = \varphi(\underline{r},t)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\dot{\varphi} - \frac{i}{\hbar}m_0c^2\varphi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}\right)$$

$$= \ddot{\varphi}\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} - \frac{i}{\hbar}m_0c^2\dot{\varphi}\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} \cdot 2$$

$$- \frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\varphi\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$$

Setze $\ddot{\varphi}$ gleich Null, da φ nur langsam mit t variiert!!

(beachte:
ES gilt bereits für 1. Zeitableitung von $\varphi = \varphi_0 e^{\frac{i}{\hbar}\underline{k}\underline{r} - \frac{i}{\hbar}E't}$

$$|i\hbar\dot{\varphi}| = E'\varphi \leq m_0c^2\varphi$$ bereits die erste Ableitung ist klein!"

Kombiniere mit voller KG-Gleichung

$$\left(\Box + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(\Delta - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi$$

setze $\psi = \varphi e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$ und benutze die vorherige Näherung

$$\frac{1}{c^2}\left(-\frac{i}{\hbar}2m_0c^2\,\dot{\varphi}-\frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\varphi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$$

$$=\left(\Delta\varphi-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\varphi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$$

dividiere durch Exponentialfaktor und beachte Aufhebung der Terme $\sim\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow\quad -\frac{i}{\hbar}2m_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\Delta\varphi$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\varphi}$$

Schrödingergl. für ein freies Teilchen (in Ortsdarstellung)

g) Ankopplung an das elektromagnet. Feld